

Josué dos Santos Barroso

**Transformação Morfológica de Campos Tensoriais
Utilizando Elementos Estruturantes Elípticos**

Juiz de Fora

09 de Dezembro de 2010

Josué dos Santos Barroso

**Transformação Morfológica de Campos Tensoriais
Utilizando Elementos Estruturantes Elípticos**

Orientador:
Marcelo Bernardes Vieira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Juiz de Fora
09 de Dezembro de 2010

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Prof. Marcelo Bernardes Vieira, D. Sc.
Orientador

Prof. Rodrigo Luis de Souza da Silva, D. Sc.

Prof. Wilhelm Passarela Freire, D. Sc.

Agradecimientos

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

1	Introdução	p. 9
1.1	Definição do Problema	p. 10
1.2	Objetivos	p. 10
2	Fundamentos Matemáticos	p. 11
2.1	Tensores de Segunda Ordem	p. 11
2.2	Tensor de Orientação	p. 12
2.3	Morfologia Matemática	p. 14
2.3.1	Erosão	p. 15
2.3.2	Dilatação	p. 15
2.4	Elemento Estruturante Tensorial Elíptico	p. 17
2.4.1	Campo Tensorial Elíptico Original em 2D	p. 17
2.4.2	Campo Tensorial Elíptico Original em 3D	p. 19
2.4.3	Elemento Estruturante Tensorial Elíptico Modificado	p. 20
3	Implementação	p. 22
3.1	Construção e alinhamento do campo tensorial elíptico	p. 22
3.2	CrITÉRIOS de Aplicação do Operador Morfológico	p. 23
3.3	Operador Morfológico tensorial	p. 26

4 Resultados	p. 29
5 Conclusão	p. 34
Referências Bibliográficas	p. 35

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de elementos estruturantes utilizados em imagens.	p. 15
2.2	Erosão: (a) elemento estruturante, (b) imagem original, (c) imagem após erosão e (d) imagem final e original sobrepostas.	p. 16
2.3	Dilatação: (a) elemento estruturante, (b) imagem original, (c) imagem após dilatação e (d) imagem final e original sobrepostas.	p. 16
2.4	Famílias de elipses com diferentes formas. (VIEIRA, 2002)	p. 17
2.5	Cálculo do coeficiente da reta tangente à elipse. (VIEIRA, 2002)	p. 18
2.6	Coordenadas Esféricas do ponto Q. (VIEIRA, 2002)	p. 19
2.7	Elemento Estruturante utilizado.	p. 21
2.8	Variação termal utilizada nas figuras desta monografia.	p. 21
3.1	Variação do ângulo máximo de influência. Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $\sigma = 10$, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{elip} = 60^\circ$ e α_{max} de respectivamente: (a) 60° , (b) 45° , (c) 30°	p. 24
3.2	Variação do ângulo elíptico. Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $\sigma = 10$, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 30^\circ$ e α_{elip} de respectivamente: (a) 60° , (b) 45° , (c) 30°	p. 25
3.3	Variação do valor de σ . Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$ e σ de respectivamente: (a) 6, (b) 8, (c) 10.	p. 25
3.4	Variação da limitação quanto à força mínima. Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $\sigma = 10$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$ e f_{min} de respectivamente: (a) 0.4, (b) 0.5, (c) 0.6.	p. 26
3.5	Aplicação de EE em campo de dimensões 20×20 com parâmetros $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$, $\sigma = 10$, $k = 1.0$ e $f_{min} = 0.3$. (a) Campo original e campo após (b) 1, (c) 3, (d) 5 e (e) 20 aplicações.	p. 27

3.6	Comparação da aplicação do EE 20 vezes e da utilização de um fator multiplicativo 20 vezes maior, o resultado é o mesmo.	p. 28
4.1	Campo em forma de hélice utilizado.	p. 29
4.2	Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 30^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.	p. 30
4.3	Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 45^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.	p. 31
4.4	Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 60^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.	p. 32
4.5	Campo com $\alpha_{max} = 30^\circ$ e $\alpha_{elip} = 60^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.	p. 33

Resumo

Esta monografia apresenta um método para o processamento morfológico de campos tensoriais, visando a ênfase de estruturas colineares e coplanares. Aborda a morfologia matemática com ênfase na área de processamento de imagens digitais 2D. É abordado também conceitos básicos tensoriais que levam a definição de díados, além da apresentação da definição de tensor de orientação. É apresentado, ainda, os elementos estruturantes elípticos, ponto central deste trabalho, que modificados levam à proposição do método em questão. Foi criada uma ferramenta de visualização e processamento morfológico de campos tensoriais baseada no visualizador tensorial do Grupo de Computação Gráfica, Imagem e Visão (GCG). Ao final, são exibidos as questões de implementação bem como os resultados.

Palavras-chave: Processamento de Imagens, Computação Gráfica, Morfologia Matemática, Campos Tensoriais.

1 *Introdução*

Campos tensoriais têm sido utilizados largamente nas mais diversas áreas. Eles representam determinados atributos físicos ou matemáticos: no ramo de mecânica de meios contínuos existe o tensor tensão, na geometria diferencial o tensor de curvatura e o tensor métrico, no estudo de eletromagnetismo o tensor de permeabilidade magnética, entre outros.

Uma das áreas na qual campos tensoriais têm grande importância é a de medicina. Nessa área, tensores expressam grandezas físicas presentes em tecidos, como o tensor de difusão, de deformação e de condutividade (GULLBERG et al., 1999), obtidos por técnicas de tomografia. O tensor de difusão é obtido por uma técnica que utiliza a ressonância magnética: *Diffusion Tensor Imaging* (DTI). Essa técnica envolve a obtenção de informações estruturais de tecidos fibrosos, como o axônios neurais da substância branca no cérebro ou fibras musculares. Essas informações são obtidas através da análise da difusão de água nessas fibras.

Em um campo tensorial, as estruturas formadas por colinearidade e coplanaridade, geralmente, carregam informação importante no universo de aplicação. Frequentemente, há a necessidade de ênfase dessas características no campo, como no processo de filtragem, por exemplo.

Este trabalho trata de tensores que tendem a formar estruturas colineares. Um exemplo são fibras em tecidos orgânicos (BASSER; MATTIELLO; LEBIHAN, 1994). Através da acentuação de estruturas colineares, as características de interesse do campo, são realçadas tornando a influência de certos tensores mais marcante.

Este trabalho apresenta um método que realiza a acentuação descrita acima, utilizando a morfologia matemática. As operações morfológicas são aplicadas com uma classe de elementos estruturantes bem definida através de trajetórias elípticas. O método proposto tem importância na visualização e processamento de campos tensoriais.

1.1 Definição do Problema

O problema tratado nesta monografia é a definição e aplicação de uma classe de elementos estruturantes que permitem o reforço de estruturas colineares.

Reforçar as estruturas colineares de um campo objetiva realçar os elementos vizinhos que possuem uma relação de continuidade linear com os elementos que apresentam atributos de interesse, evidenciando as características consideradas importantes.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de um método para ênfase de estruturas colineares de interesse presentes em um campo tensorial através da aplicação de operações morfológicas.

O objetivo secundário é a criação de uma ferramenta computacional capaz de visualizar e processar morfologicamente campos tensoriais diversos.

2 *Fundamentos Matemáticos*

2.1 Tensores de Segunda Ordem

Um tensor é uma entidade matemática cujas propriedades por ele representadas são iguais em qualquer sistema de coordenadas (KOLECKI, 2002). Essas propriedades são geralmente físicas, e, nesse caso, a independência quanto ao sistema de coordenadas significa que o material alvo terá sempre as mesmas características físicas em relação a qualquer observador. Quando ocorre a mudança do sistema de coordenadas, seus componentes terão um novo valor de acordo com uma transformação definida. Nesse sentido pode-se exemplificar como tensores, a temperatura (escalar), a velocidade (vetor) e o tensor de permeabilidade magnética (díado). A ordem dessa entidade é dada de acordo com seu tipo, conforme é mostrado na tabela abaixo:

Tipo do Tensor	Ordem	Nº de componentes
Escalar	0	$3^0 = 1$
Vetor	1	$3^1 = 3$
Díado	2	$3^2 = 9$
⋮	⋮	⋮

Um tensor de segunda ordem pode ser visto como uma função linear que mapeia um vetor em outro (DANIELSON, 1996). Uma das formas de se obter um díado é como resultado do produto tensorial entre dois tensores de primeira ordem, conforme é mostrado na forma matricial abaixo.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Ao aplicar-se um díado gerado por produto diático $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ a um vetor \mathbf{w} obtém-se um vetor paralelo a \mathbf{u} e escalado pelo produto interno $\mathbf{v}\mathbf{w}$.

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}^T \mathbf{w}) \mathbf{u} \quad (2.2)$$

O produto diático não é comutativo pois, de maneira análoga, ao aplicar-se $\mathbf{v}\mathbf{u}^T$ a um vetor \mathbf{w} obtém-se um vetor paralelo a \mathbf{v} e escalado pelo produto interno $\mathbf{u}\mathbf{w}$.

$$\mathbf{v}\mathbf{u}^T \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{u}\mathbf{w}) \mathbf{v} \quad (2.3)$$

As propriedades de um díado são similares as de uma matriz, logo, em geral, a pós-multiplicação e a pré-multiplicação do díado por um vetor resultam em vetores diferentes. Esse fato pode ser verificado ao se interpretar a pós-multiplicação $\mathbf{T}\mathbf{v}$, com \mathbf{T} sendo um tensor diático e \mathbf{v} um vetor qualquer, como a combinação linear das colunas de \mathbf{T} tendo como coeficientes os valores em \mathbf{v} . No caso da pré-multiplicação $\mathbf{v}^T \mathbf{T}$, o resultado será a combinação linear das linhas de \mathbf{T} tendo como coeficientes os valores em \mathbf{v} . Portanto, essas aplicações só resultarão no mesmo vetor quando \mathbf{T} for simétrico.

2.2 Tensor de Orientação

Tensor de orientação é um artifício matemático criado por Westin (WESTIN, 1994) para estimar orientações. Ele vai ser tratado aqui segundo as discussões propostas em (VIEIRA, 2002). Esse tensor é simétrico e pode ser visto como uma soma ponderada de projeções

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T, \quad (2.4)$$

onde λ_i é um autovalor e \mathbf{e}_i é o autovetor correspondente. A decomposição do tensor \mathbf{T} é única se os autovalores são distintos, sendo os díados $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T$, os operadores de projeção. Quando dois ou mais autovalores são iguais, há uma opção na definição dos autovetores. Porém, o subespaço que eles definem é distinto. Se \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 possuem o mesmo autovalor, por exemplo, eles definem em seu subespaço o seguinte operador de projeção

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T. \quad (2.5)$$

Dessa forma, o conjunto dos coeficientes da decomposição do tensor nos operadores acima são únicos. Essa decomposição em operadores de significados geométricos variantes é proposta por Westin, de forma que

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \dots + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T. \quad (2.6c)$$

O primeiro operador corresponde a um subespaço de uma dimensão, o segundo a um subespaço bidimensional e etc. Utilizando essa nova base tem-se o tensor de orientação escrito como

$$\mathbf{T} = \lambda_n\mathbf{T}_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1})\mathbf{T}_i. \quad (2.7)$$

Com $n = 3$, obtém-se o tensor de saliência de Lee (LEE; MEDIONI, 1999) que pode ser escrito como

$$\mathbf{T} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{T}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{T}_2 + \lambda_3\mathbf{T}_3, \quad (2.8)$$

onde os coeficientes $(\lambda_1 - \lambda_2)$, $(\lambda_2 - \lambda_3)$ e λ_3 podem ser entendidos como as coordenadas do tensor \mathbf{T} na base \mathbf{T}_i (Eq. 2.6). Para Westin, a complexidade da vizinhança é representada pelo posto do tensor de orientação. Considerando o espaço 3D, ele interpreta três casos particulares de distribuição de autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$:

- caso planar, tensor de posto 1 com $\lambda_1 \gg \lambda_2 \simeq \lambda_3$: $\mathbf{T} \simeq \lambda_1\mathbf{T}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T$ corresponde a uma vizinhança que é aproximadamente planar. A orientação do vetor normal do plano é dado por \mathbf{e}_1 ;
- caso linear, tensor de posto 2 com $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \gg \lambda_3$: $\mathbf{T} \simeq \lambda_1\mathbf{T}_2 = \lambda_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T)$ corresponde a uma vizinhança aproximadamente linear. A orientação da reta é dada pelo autovetor \mathbf{e}_3 ;

- caso isotrópico, tensor de posto 3 com $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_3$: $\mathbf{T} \simeq \lambda_1 \mathbf{T}_3 = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T)$ corresponde a uma vizinhança isotrópica, significando que há energia na vizinhança mas nenhuma orientação dominante.

2.3 Morfologia Matemática

A Morfologia matemática (MM) é o conjunto de técnicas usadas para extrair informações relacionadas à estrutura geométrica de um conjunto alvo. Quando aplicada às imagens de duas dimensões, tem-se operadores que obtêm representação e descrição da forma de regiões, esqueletos dos objetos, bordas, entre outros, além dos operadores que realizam pós e pré-processamento de imagens como filtro espacial morfológico, *pruning* e *thinning* (GONZALEZ, 2010). MM é baseada na teoria dos conjuntos, área muito consolidada da matemática, o que torna relativamente fácil sua aplicação em diferentes domínios.

Os conceitos de reflexão e de translação têm grande importância na definição de operadores morfológicos, principalmente dos operadores básicos.

A reflexão de um conjunto \mathbf{B} , indicada como $\hat{\mathbf{B}}$, é definida por

$$\hat{\mathbf{B}} = \{w | w = -b, \text{ para } b \in \mathbf{B}\}. \quad (2.9)$$

No caso em que \mathbf{B} representa os pixels de um objeto em uma imagem, $\hat{\mathbf{B}}$ seria o mesmo objeto refletido em relação à origem.

A translação de um conjunto \mathbf{B} no ponto $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, indicada como $(\mathbf{B})_{\mathbf{z}}$, é definida por

$$(\mathbf{B})_{\mathbf{z}} = \{c | c = b + \mathbf{z}, \text{ para } b \in \mathbf{B}\}. \quad (2.10)$$

No caso em que \mathbf{B} representa os pixels de um objeto em uma imagem, $(\mathbf{B})_{\mathbf{z}}$ seria o mesmo objeto transladado por \mathbf{z} .

Essas operações são feitas utilizando um subconjunto chamado elemento estruturante (EE) (Fig 2.1). Dependendo das características morfológicas do elemento estruturante e do modo como é aplicado tem-se operações diferentes. No caso deste trabalho, o domínio é um campo tensorial e, portanto, utiliza-se como EE um campo tensorial de menores dimensões.

Existem duas operações que são consideradas primitivas do processamento morfológico em imagens: Erosão e Dilatação. Essas duas operações serão descritas abaixo.

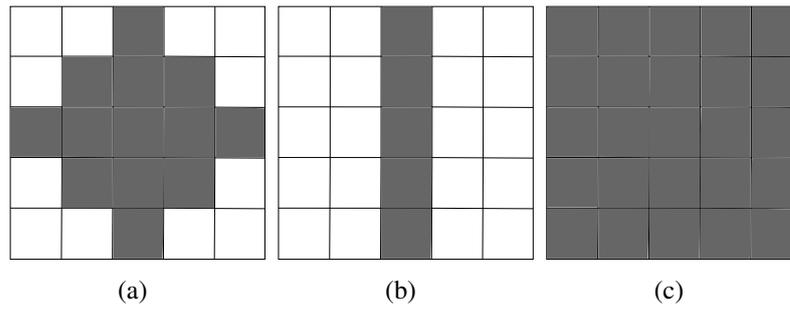


Figura 2.1: Exemplos de elementos estruturantes utilizados em imagens.

2.3.1 Erosão

Seendo \mathbf{A} e o elemento estruturante \mathbf{B} conjuntos de \mathbb{Z}^2 , o conjunto $\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$ (erosão de \mathbf{A} por \mathbf{B}) é dado por

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{B} = \{z | (\mathbf{B})_z \subseteq \mathbf{A}\}, \quad (2.11)$$

o que pode ser descrito como todos os pontos z tais que, \mathbf{B} transladado por z está contido em \mathbf{A} .

A erosão pode ser representada ainda como

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{B} = \{z | (\mathbf{B})_z \cap \mathbf{A}^c = \emptyset\}, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{A}^c é complemento de \mathbf{A} e \emptyset é o conjunto vazio. Essa representação pode ser interpretada como todos os pontos z tais que, \mathbf{B} transladado por z não está contido no fundo da imagem.

A operação de erosão é aplicada quando se quer diminuir as dimensões do objeto, ou de forma mais geral, corroer as bordas (Fig. 2.2).

2.3.2 Dilatação

Seendo \mathbf{A} e o elemento estruturante \mathbf{B} conjuntos de \mathbb{Z}^2 , o conjunto $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ (dilatação de \mathbf{A} por \mathbf{B}) é dado por

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{z | (\hat{\mathbf{B}})_z \cap \mathbf{A} \neq \emptyset\}, \quad (2.13)$$

o que pode ser descrito como os deslocamentos z que fazem com que a reflexão do elemento estruturante \mathbf{B} tenha algum elemento em comum com o conjunto \mathbf{A} .

Uma relação alternativa da operação de dilatação seria

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{z | [(\hat{\mathbf{B}})_z \cap \mathbf{A}] \subseteq \mathbf{A}\}. \quad (2.14)$$

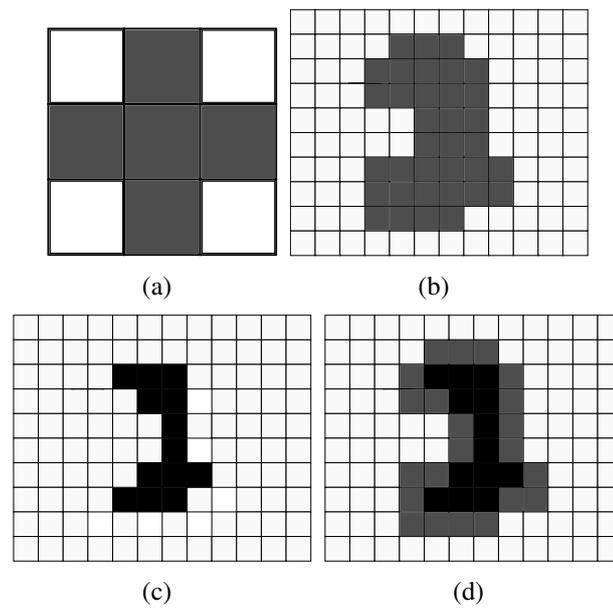


Figura 2.2: Erosão: (a) elemento estruturante, (b) imagem original, (c) imagem após erosão e (d) imagem final e original sobrepostas.

A dilatação é uma operação dual da erosão e por isso essa operação promove um aumento do objeto (Fig. 2.3).

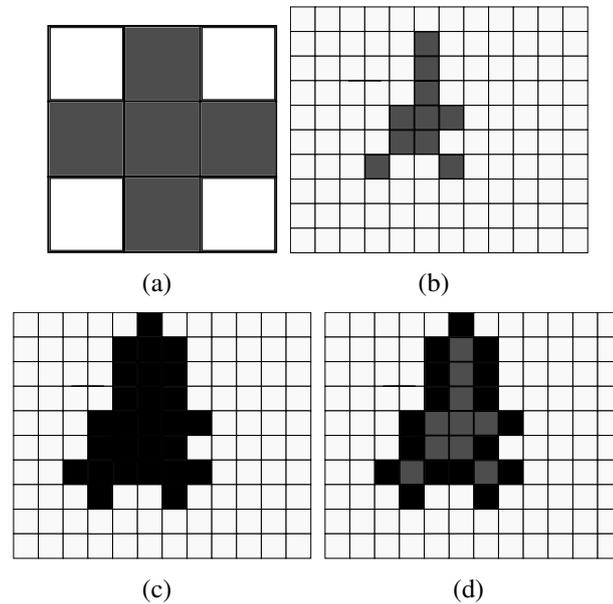


Figura 2.3: Dilatação: (a) elemento estruturante, (b) imagem original, (c) imagem após dilatação e (d) imagem final e original sobrepostas.

2.4 Elemento Estruturante Tensorial Elíptico

O tipo de elemento estruturante utilizado será uma variação do campo tensorial de orientação proposto por (VIEIRA, 2002). No trabalho citado, foi empregada famílias de curvas elípticas para ajustar a curvatura das superfícies construídas. Os campos tensoriais serão definidos para duas e três dimensões.

2.4.1 Campo Tensorial Elíptico Original em 2D

Foi proposta uma família de elipses com centro no eixo y e tangentes ao eixo x , dada por

$$\frac{x^2}{t_x^2 k^2} + \frac{(-t_y + \frac{y}{k})^2}{t_y^2} = 1, \quad (2.15)$$

onde t_x e t_y são constantes e k define a elipse cujos eixos têm tamanhos $2kt_x$ e $2kt_y$ (Fig. 2.4)

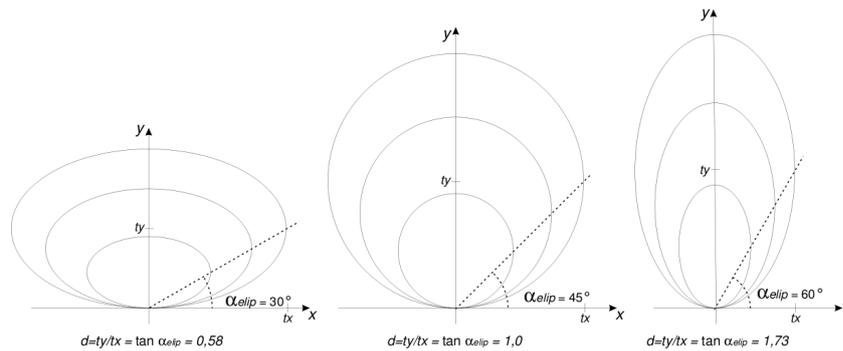


Figura 2.4: Famílias de elipses com diferentes formas. (VIEIRA, 2002)

A curvatura de uma família de elipses é controlada pela razão d entre os eixos,

$$d = \frac{2kt_y}{2kt_x} = \frac{t_y}{t_x}, \quad (2.16)$$

o efeito de sua variação pode ser observado na Figura 2.4, onde são apresentadas três famílias com diferentes valores de d .

Sendo $P \in \mathbb{R}$ um ponto com coordenadas polares (ρ, θ) , o coeficiente angular da reta que passa por P e é tangente à elipse definida nas equações 2.15 e 2.16, é expresso por

$$\tan \beta = \frac{2d^2 \tan \theta}{d^2 - \tan^2 \theta}, \quad \cos \theta \neq 0 \quad \text{e} \quad d \neq |\tan \theta|, \quad (2.17)$$

onde β é o ângulo entre essa reta e o eixo x .

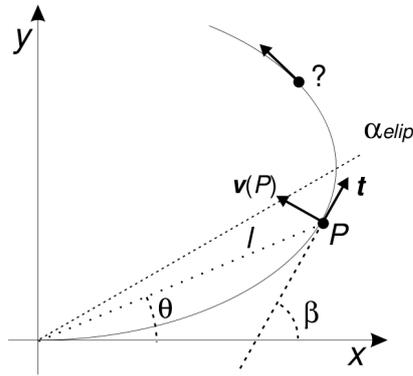


Figura 2.5: Cálculo do coeficiente da reta tangente à elipse. (VI-EIRA, 2002)

A restrição $d \neq |\tan \theta|$ se deve ao fato de que, caso contrário, a reta tangente seria perpendicular ao eixo x , o que leva à invalidação da Equação 2.17 já que $\beta = 90^\circ$. Portanto, um ponto localizado nas extremidades (ou além) do eixo paralelo a x não pode ser conectado à origem através de uma trajetória elíptica. Dessa forma, há um ângulo máximo de conexão α_{elip} que pode ser usado para definir uma família de elipses com

$$d = \tan \alpha_{elip}. \quad (2.18)$$

O campo vetorial elíptico é definido por

$$\mathbf{v}(P) = [\sin \beta - \cos \beta]^T, \quad (2.19)$$

onde $\mathbf{v}(P)$ é o vetor perpendicular à reta tangente no ponto P .

O campo gradiente de força deve ter a mesma direção das trajetórias elípticas, a mesma força deve ser atribuída em uma trajetória ortogonal. A trajetória que passa por P e é ortogonal às elipses, passa pelo eixo x em

$$s(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \left(1 + \left(2 - \frac{1}{d^2} \right) \tan^2 \theta \right)^{\frac{d^2}{2d^2-1}}. \quad (2.20)$$

Usando s como medida de distância, define-se o campo de força elíptico como

$$f(\rho, \theta) = e^{-\frac{s(\rho, \theta)^2}{\sigma^2}}, \quad (2.21)$$

a extensão do campo e a atenuação em função de s é dada por σ .

O campo de influência em 2D de conexões elípticas é

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = f(\mathbf{P})\mathbf{v}(\mathbf{P})\mathbf{v}(\mathbf{P})^T. \quad (2.22)$$

De posse dessas informações deriva-se o campo em 3D que, modificado, definirá o EE utilizado nessa monografia.

2.4.2 Campo Tensorial Elíptico Original em 3D

Dado um ponto \mathbf{P} com um vetor normal associado \mathbf{n} (ponto-normal (\mathbf{P}, \mathbf{n})), os campos vetorial e de força definem elipsoides que tangenciam o plano definido por \mathbf{n} em \mathbf{P} e, cujos centros estão sobre a reta que passa por \mathbf{P} com direção \mathbf{n} . A forma das elipsoides continuam sendo controlada por \mathbf{d} que, nesse caso, é a relação entre o tamanho dos eixos paralelo e perpendicular a \mathbf{n} .

Considerando um ponto-normal $(\mathbf{P}, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e quaisquer dois vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} , perpendiculares entre si e em relação a \mathbf{k} , sendo os três unitários. Formando um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 definido pelo ponto \mathbf{P} e a base ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, as coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) de um ponto $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3$ qualquer são dadas por

$$\rho = |\mathbf{PQ}|, \quad \tan \phi = \frac{k}{\sqrt{i^2 + j^2}}, \quad \tan \theta = \frac{j}{i}, \quad (2.23)$$

onde $i = \mathbf{i} \cdot \mathbf{PQ}$, $j = \mathbf{j} \cdot \mathbf{PQ}$, $k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{PQ}$ são coordenadas cartesianas de \mathbf{Q} (Fig. 2.6).

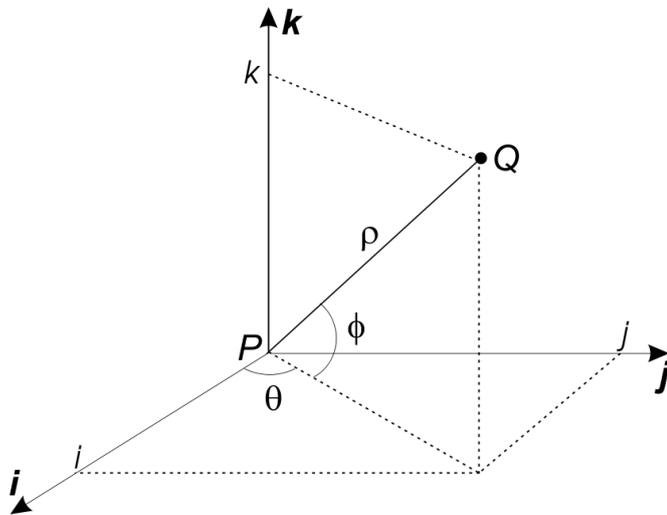


Figura 2.6: Coordenadas Esféricas do ponto \mathbf{Q} . (VIEIRA, 2002)

Pode-se ver que ϕ é o ângulo entre o vetor \mathbf{PQ} e o plano \mathbf{ij} . Portanto, a Equação 2.17 pode

ser utilizada para o cálculo do ângulo β entre o plano \mathbf{ij} e o plano tangente ao elipsoide que passa por Q,

$$\tan \beta = \frac{2d^2 \tan \phi}{d^2 - \tan^2 \phi}, \quad \cos \theta \neq 0, \quad d = \tan \alpha_{elip} \quad \text{e} \quad d \neq |\tan \theta|, \quad (2.24)$$

como definido anteriormente, α_{elip} é o ângulo máximo de conexão. Dessa forma, define-se o campo vetorial 3D como

$$\mathbf{v}_N((P, \mathbf{k}), Q) = (\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) \cos \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) + \mathbf{k} \sin \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.25)$$

onde o acréscimo de $\frac{\pi}{2}$ a β define vetores normais aos elipsoides.

A distância s definida no caso 2D, é definida em 3D como a distância à origem da trajetória ortogonal que passa por Q e dada pela equação

$$s((P, \mathbf{k}), Q) = \rho \cos \phi \left(1 + \left(2 - \frac{1}{d^2} \right) \tan^2 \phi \right)^{\frac{d^2}{2d^2-1}}, \quad (2.26)$$

que leva à equação de força

$$f_N((P, \mathbf{k}), Q) = e^{-\frac{s((P, \mathbf{k}), Q)^2}{\sigma^2}}, \quad (2.27)$$

que possui mesma direção do campo vetorial (Eq. 2.25). O campo elíptico é definido por

$$C_N((P, \mathbf{k}), Q) = \begin{cases} r\mathbf{v}\mathbf{v}^T, & \text{se } \phi \leq \alpha_{max} \\ 0, & \text{se } \phi \geq \alpha_{max} \end{cases}, \quad (2.28)$$

sendo

$$\alpha_{max} \leq \alpha_{elip}, \quad r = f_N((P, \mathbf{k}), Q), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_N((P, \mathbf{k}), Q),$$

onde α_{elip} define a curvatura para conexão de superfícies. O parâmetro α_{max} é um ângulo de corte, a partir do qual, o campo de influência é nula.

2.4.3 Elemento Estruturante Tensorial Elíptico Modificado

Neste trabalho, foi feita uma modificação no campo tensorial elíptico proposto por (VI-EIRA, 2002). Essa modificação deve-se ao fato de o campo ser utilizado originalmente para a inferência de normais, enquanto que no presente caso, ele deve ter a função de enfatizar estruturas colineares. Dessa forma, utiliza-se as trajetórias elípticas diretamente como campo de influência e não os vetores normais às trajetórias, tendo assim, a mesma forma do campo de força elíptico.

O campo modificado é gerado a partir da Equação 2.25 porém sem o acréscimo de $\frac{\pi}{2}$ a β

$$\mathbf{v}(P, Q) = (i \cos \theta + j \sin \theta) \cos(\beta) + k \sin(\beta), \quad (2.29)$$

O campo de força permanece o mesmo da Equação 2.27 e o EE é definido pela Equação 2.28 utilizando o vetor \mathbf{v} descrito acima.

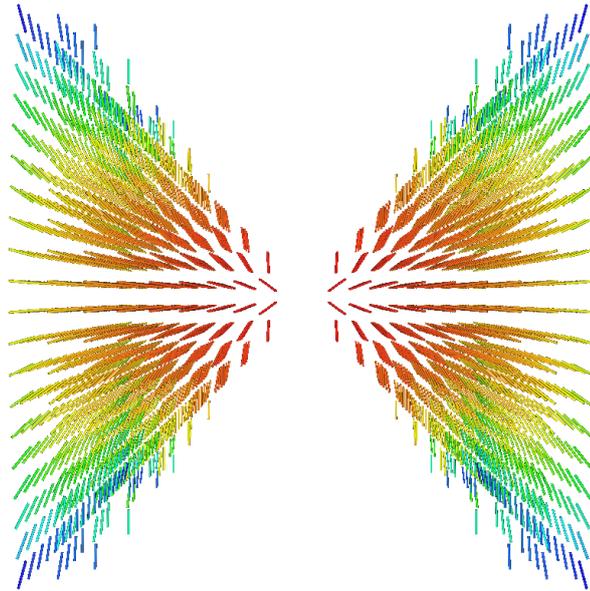


Figura 2.7: Elemento Estruturante utilizado.

A Figura 2.7 apresenta o campo tensorial elíptico modificado, utilizando coloração termal crescente para mostrar a variação da força aplicada a cada tensor (Fig. 2.8). Os parâmetros utilizados na construção do campo elíptico e de força foram: $\alpha_{elip} = \alpha_{max} = 45^\circ$ e $\sigma = 100$. A representação dos tensores é feita através das estruturas chamadas de glifos (KINDLMANN, 2004).



Figura 2.8: Variação termal utilizada nas figuras desta monografia.

3 *Implementação*

3.1 Construção e alinhamento do campo tensorial elíptico

A ênfase de um campo tensorial, geralmente, não é feita por toda a extensão do campo. Frequentemente, há o desejo de se acentuar regiões específicas. No método proposto por este trabalho, essas regiões são influenciadas através da aplicação do elemento estruturante elíptico nos tensores que caracterizam essas regiões.

Ao aplicar o elemento estruturante em um dado tensor, é levado em consideração sua posição P e orientação. A orientação desse tensor alvo é dada por seus autovetores, formando assim, a base do sistema onde o EE será construído, $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Em cada ponto Q do espaço onde o campo tensorial está inserido, é calculado inicialmente o vetor posição \bar{r} do ponto atual em relação à origem do sistema, que é localizado no centro do tensor alvo. Esse vetor é encontrado através de simples diferença euclidiana. (Eq. 3.1)

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

As coordenadas de \bar{r} obtidas na Equação 3.1 não estão na base local $\{e_1, e_2, e_3\}$, por isso, é necessário que haja mudança de base. As coordenadas de \bar{r} na base local são resultantes da projeção desse vetor sobre cada vetor da base local, assim

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r} \cdot e_1 \\ \bar{r} \cdot e_2 \\ \bar{r} \cdot e_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição no sistema local de coordenadas e os autovetores utilizados são unitários.

Os cálculos descritos na Seção 2.4 são feitos levando em consideração as coordenadas es-

féricas do ponto Q, portanto, conforme a Equação 2.23, as coordenadas esféricas do vetor \mathbf{r} são dadas por

$$\rho = |\mathbf{r}|, \quad \tan \phi = \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad \tan \theta = \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.3)$$

Utiliza-se então as coordenadas obtidas em 3.3 nas Equações 2.24 e 2.29, resultando em um vetor $\bar{\mathbf{v}}$ que descreve o campo vetorial elíptico.

Para a geração do campo de influência deve-se considerar as coordenadas globais de $\bar{\mathbf{v}}$, essas podem ser obtidas através da aplicação da transformação definida para a mudança da base global para a base local,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1_x} & \mathbf{e}_{2_x} & \mathbf{e}_{3_x} \\ \mathbf{e}_{1_y} & \mathbf{e}_{2_y} & \mathbf{e}_{3_y} \\ \mathbf{e}_{1_z} & \mathbf{e}_{2_z} & \mathbf{e}_{3_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1_x}\bar{v}_1 + \mathbf{e}_{2_x}\bar{v}_2 + \mathbf{e}_{3_x}\bar{v}_3 \\ \mathbf{e}_{1_y}\bar{v}_1 + \mathbf{e}_{2_y}\bar{v}_2 + \mathbf{e}_{3_y}\bar{v}_3 \\ \mathbf{e}_{1_z}\bar{v}_1 + \mathbf{e}_{2_z}\bar{v}_2 + \mathbf{e}_{3_z}\bar{v}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

De posse do vetor que caracteriza o campo vetorial, utiliza-se a Equação 2.28 para descrever o campo de influência.

3.2 Critérios de Aplicação do Operador Morfológico

Para se enfatizar um campo por meio do elemento elíptico deve-se selecionar os tensores previamente à aplicação do método. É importante a escolha de tensores que sejam expressivos para uma região, de forma que, ao se realizar a acentuação toda a região de interesse seja afetada da forma apropriada. Esses tensores devem possuir coeficiente de difusão linear alto preferencialmente, já que o operador morfológico privilegia a direção do principal autovetor do tensor alvo. Os coeficientes de difusão são dados por

$$c_l = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (3.5)$$

$$c_p = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (3.6)$$

$$c_s = \frac{3\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad (3.7)$$

chamados respectivamente de coeficientes de difusão linear, planar e esférica.

A aplicação do operador morfológico aqui descrito não deve influenciar tensores que não têm contribuição relevante para o campo quanto à difusão. Dessa forma, tensores que possuem a soma de autovalores muito pequena ou coeficiente de difusão esférica (Eq. 3.7) grande não são levados em consideração.

A correta escolha dos valores dos parâmetros é fundamental para o sucesso da aplicação do método. O método recebe como parâmetros para a definição dos elementos estruturantes a serem aplicados no campo: ângulo máximo de influência (α_{max}), ângulo elíptico (α_{elip}), desvio padrão da força (σ), fator multiplicativo (k) e força mínima (f_{min}).

Cada um dos parâmetros será descrito e exemplificado (exceto o parâmetro de força mínima por não causar diferença visual). As figuras possuem variação de cor termal (Fig. 2.8) de acordo com o comprimento do vetor que possui como coordenadas os autovalores, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Esse valor é normalizado entre o menor e o maior comprimento do vetor λ .

O ângulo máximo de influência controla o maior ângulo em relação à direção principal do tensor alvo em que há influência do operador no campo. Quanto menor o ângulo mais estreita é a influência, mudando apenas os tensores próximos ao eixo principal. (Fig. 3.1).

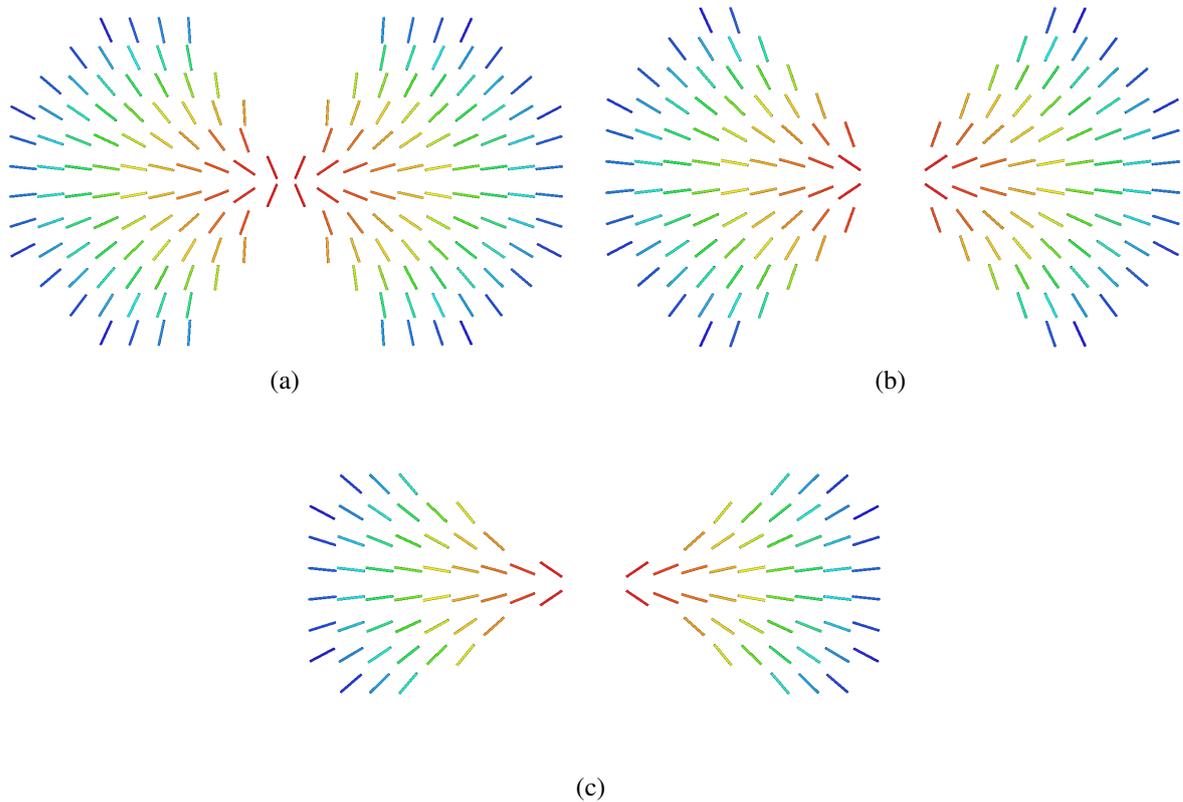


Figura 3.1: Variação do ângulo máximo de influência. Campos de influência 2D de dimensão 20×20 , $\sigma = 10$, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{elip} = 60^\circ$ e α_{max} de respectivamente: (a) 60° , (b) 45° , (c) 30° .

O ângulo elíptico controla a curvatura das elipses usadas para a geração das trajetórias elípticas. Sua variação se dá de acordo o efeito desejado com relação à curvatura do campo na região de aplicação, geralmente é de interesse que a ênfase siga a mesma direção do campo. (Fig. 3.2).

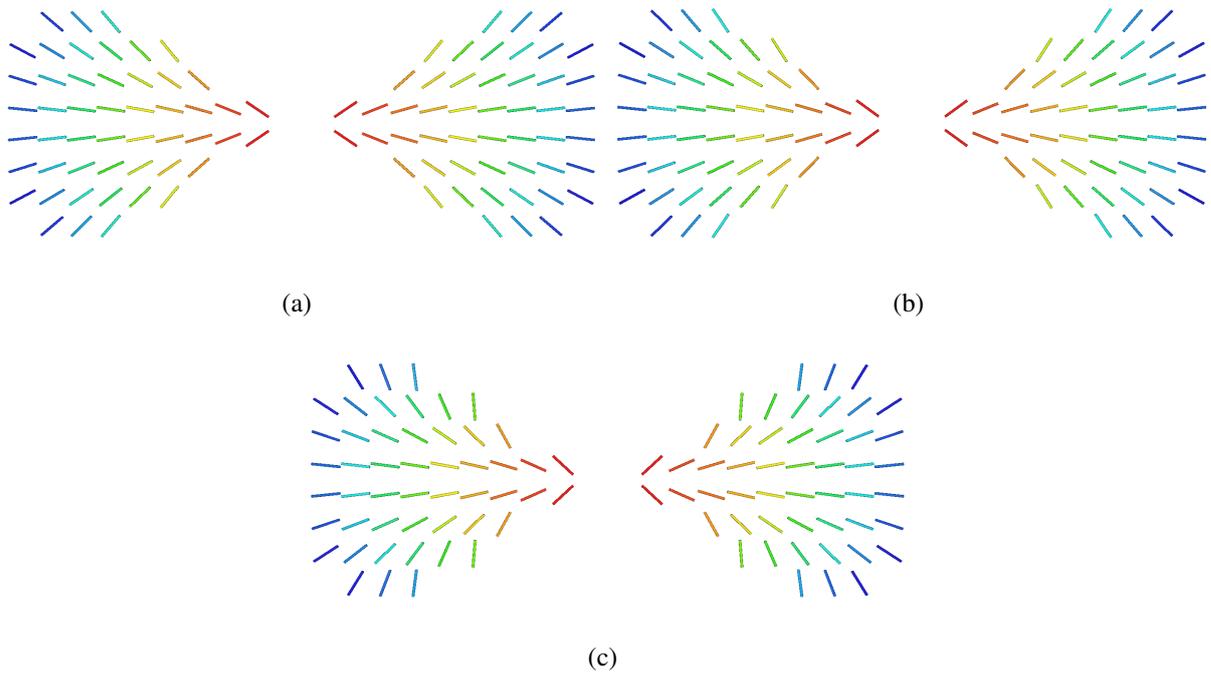


Figura 3.2: Variação do ângulo elíptico. Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $\sigma = 10$, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 30^\circ$ e α_{elip} de respectivamente: (a) 60° , (b) 45° , (c) 30° .

O desvio padrão da força é utilizado diretamente no cálculo da força (Eq. 2.27). Como o campo de força utilizado é uma gaussiana, utiliza-se o desvio padrão σ para variar a distribuição das intensidades nas diferentes distâncias. (Fig. 3.3).

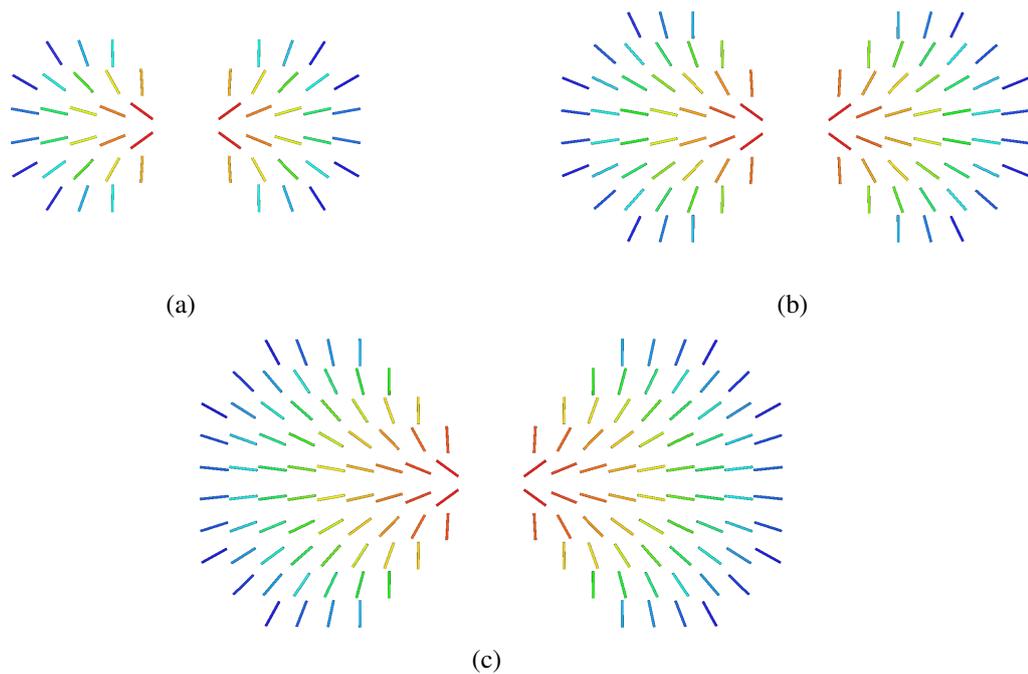


Figura 3.3: Variação do valor de σ . Campos de influência 2D de dimensão 20x20, $f_{min} = 0.3$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$ e σ de respectivamente: (a) 6, (b) 8, (c) 10.

O fator multiplicativo k determina o quanto o operador influenciará o campo, todos os valores de força do elemento estruturante são multiplicados por esse valor. Pode-se considerar, que quando esse parâmetro possui um valor inteiro $k > 1$, a aplicação do elemento estruturante é equivalente ao se realizar k aplicações do mesmo elemento, na mesma posição e direção.

A força mínima f_{min} visa estipular um limite inferior para os valores de força. O propósito desse parâmetro é apenas considerar valores de força suficientemente grandes. (Fig. 3.4).

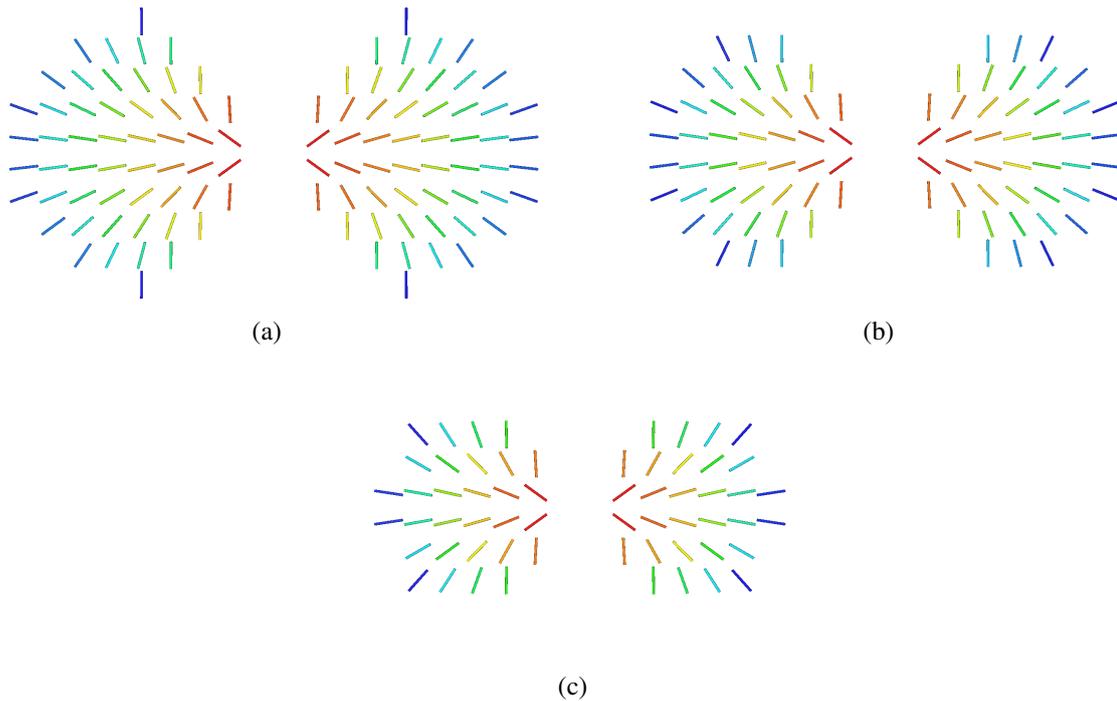


Figura 3.4: Variação da limitação quanto à força mínima. Campos de influência 2D de dimensão 20×20 , $\sigma = 10$, $k = 1.0$, $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$ e f_{min} de respectivamente: (a) 0.4, (b) 0.5, (c) 0.6.

3.3 Operador Morfológico tensorial

Os campos tensoriais de influência obtidos são somados com o campo original, realizando assim, uma acumulação das influências. Quanto maior a influência em um determinado ponto, maior é a tendência do tensor local ter a mesma direção do campo de influência naquele ponto. Esse fato pode ser visto na Figura 3.5.

Pode-se perceber as perturbações causadas pelo EE no campo que inicialmente era puramente linear. Na primeira aplicação é visível o aparecimento de glifos planares, indicando alto valor de c_p , o que ocorre devido à soma de tensores com direções principais ortogonais. As regiões com menor força necessitam de mais aplicações para convergirem para as direções do EE. Ao se aplicar várias vezes o campo, o que acontece é um acúmulo das influências. De

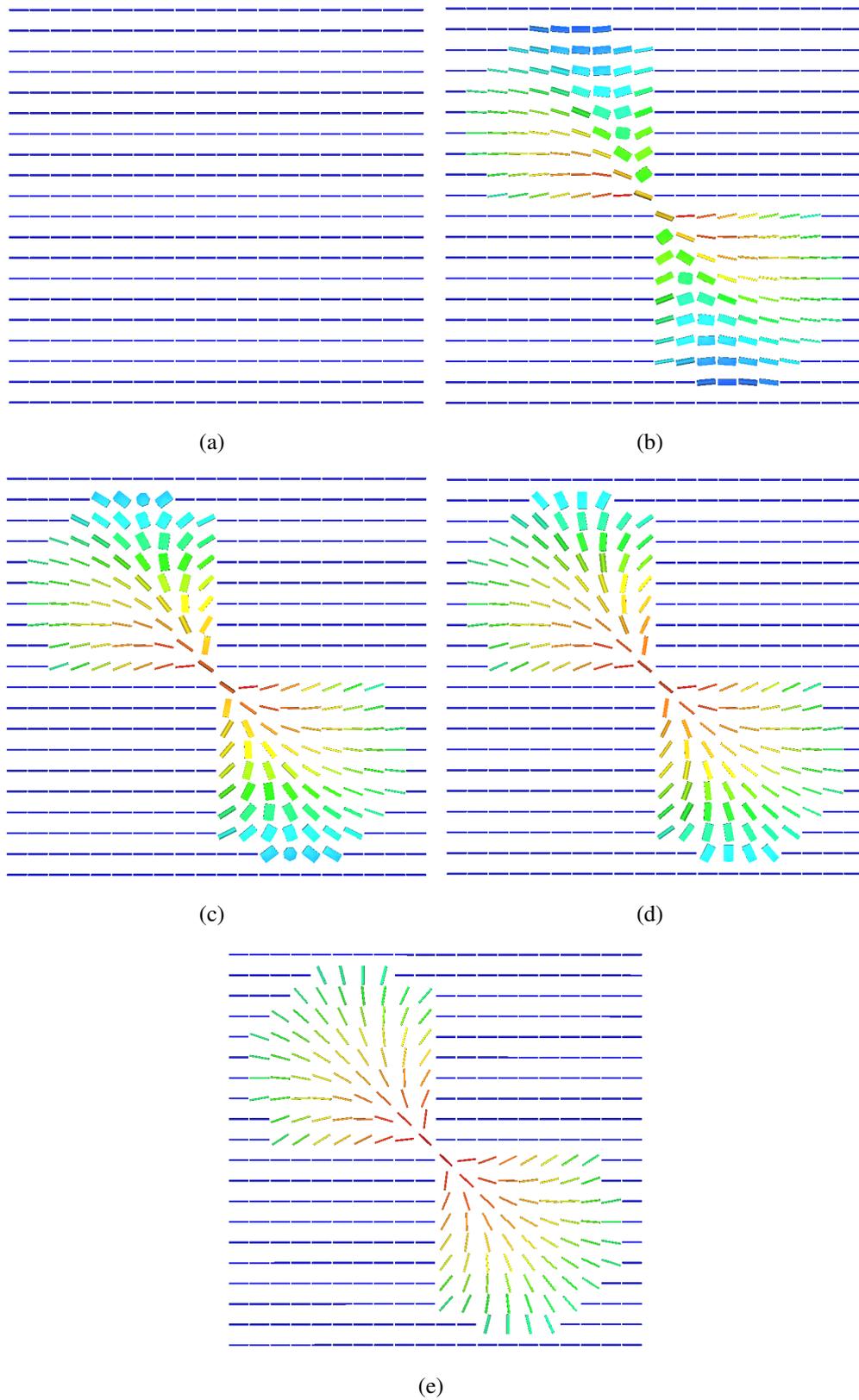


Figura 3.5: Aplicação de EE em campo de dimensões 20×20 com parâmetros $\alpha_{max} = 45^\circ$, $\alpha_{elip} = 45^\circ$, $\sigma = 10$, $k = 1.0$ e $f_{min} = 0.3$. (a) Campo original e campo após (b) 1, (c) 3, (d) 5 e (e) 20 aplicações.

forma equivalente, pode-se aplicar um operador morfológico resultante da soma de três EE ao invés de se realizar três aplicações. Pode-se ainda utilizar o parâmetro de fator multiplicativo para alcançar o mesmo resultado. (Fig. 3.6).

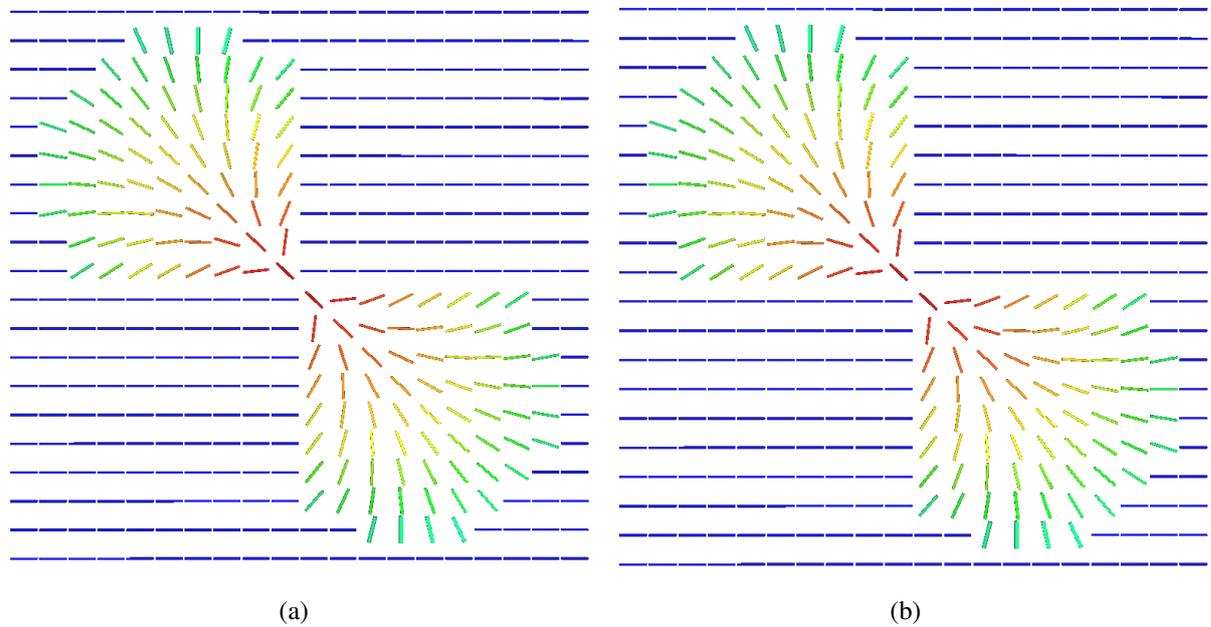


Figura 3.6: Comparação da aplicação do EE 20 vezes e da utilização de um fator multiplicativo 20 vezes maior, o resultado é o mesmo.

4 *Resultados*

Para efeito de verificação dos resultados do método será utilizado um campo helicoidal gerado artificialmente (Fig. 4.1). Esse campo forma, de maneira conveniente, estruturas que descrevem curvas suaves o que facilita a aplicação do método.

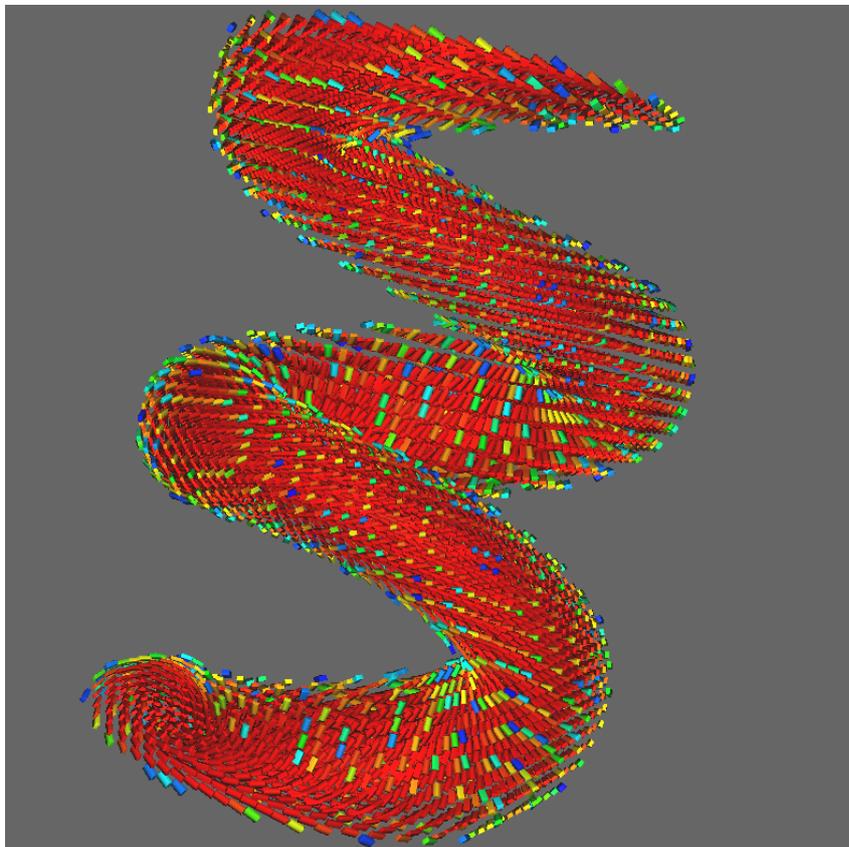


Figura 4.1: Campo em forma de hélice utilizado.

Alguns tensores foram escolhidos previamente, por sua disposição no campo e por terem valores mais altos quanto ao coeficiente de difusão linear em relação às outras regiões (Eq. 3.5). Inicialmente, o campo terá o operador morfológico aplicado nos pontos escolhidos de forma a enfatizar o campo como um todo. Os parâmetros escolhidos foram: $\sigma = 20$, fator multiplicativo de 1.0, força mínima igual a 0, os ângulos α_{max} e α_{elip} são variáveis.

As Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, utilizam coloração termal para evidenciar as maiores normas

do vetor λ conforme definido na Seção 3.2, além de utilizarem transparência para facilitar a visualização dos elementos que possuem maiores coeficientes de difusão linear.

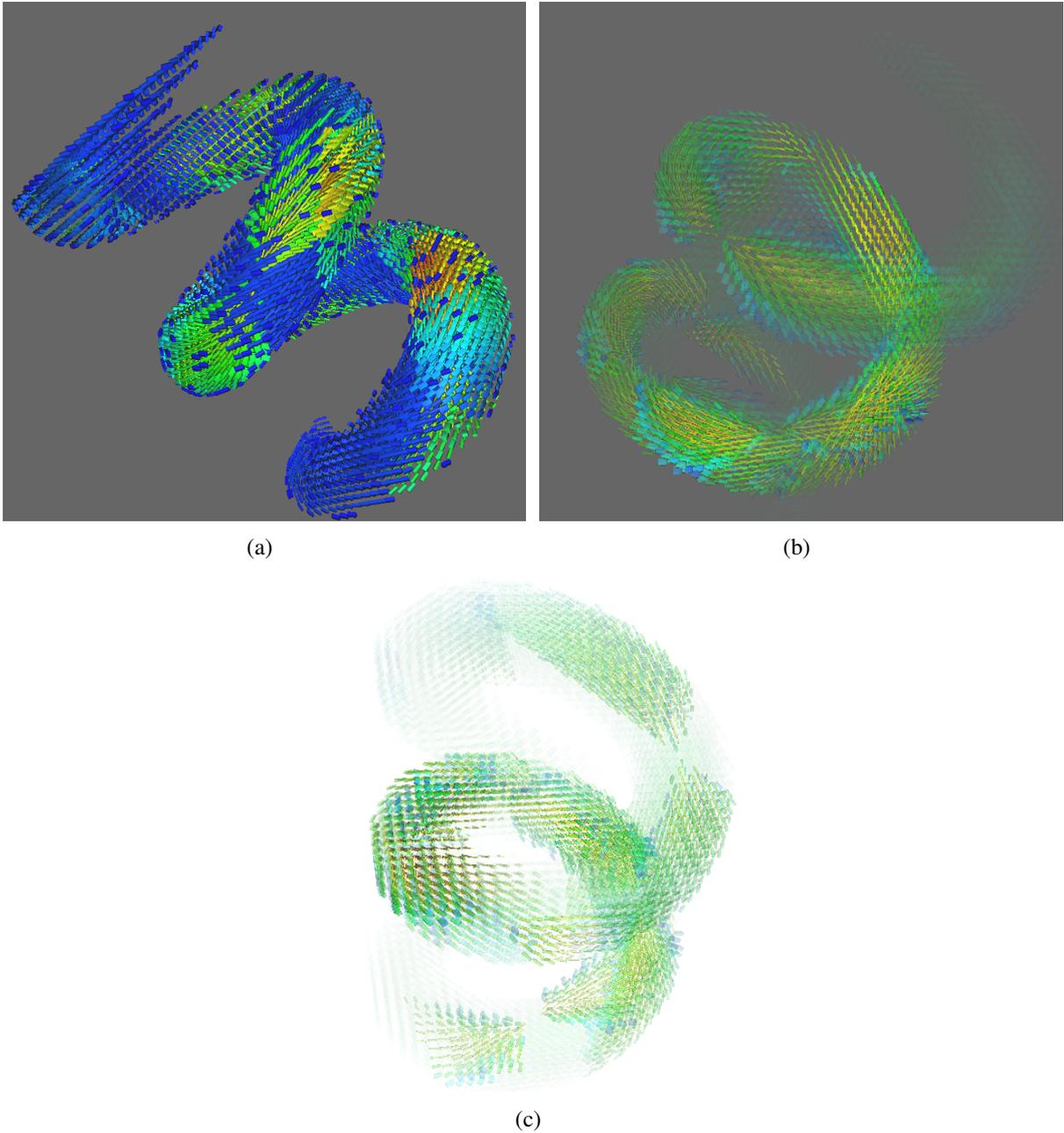


Figura 4.2: Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 30^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.

A utilização de ângulos maiores afeta um maior número de tensores além de criar conexões mais suaves. Porém, faz com que os que se situam próximos às origens das aplicações se dirijam para borda e de forma mais rápida, o que pode ser indesejável. Para solucionar isso, pode ser usado um ângulo elíptico de 60° , porém, com um ângulo máximo de 30° (Fig. 4.5).

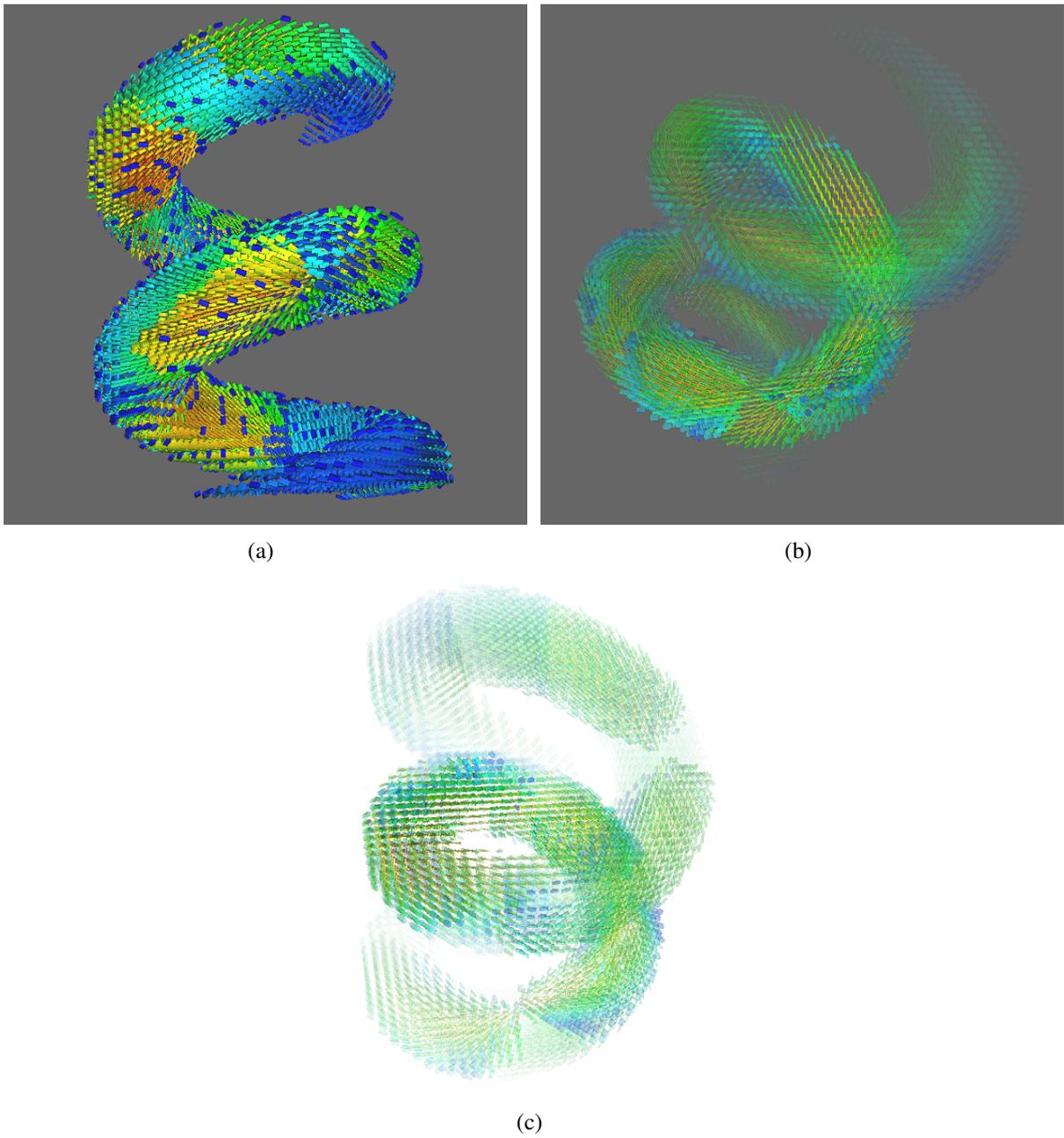


Figura 4.3: Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 45^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.

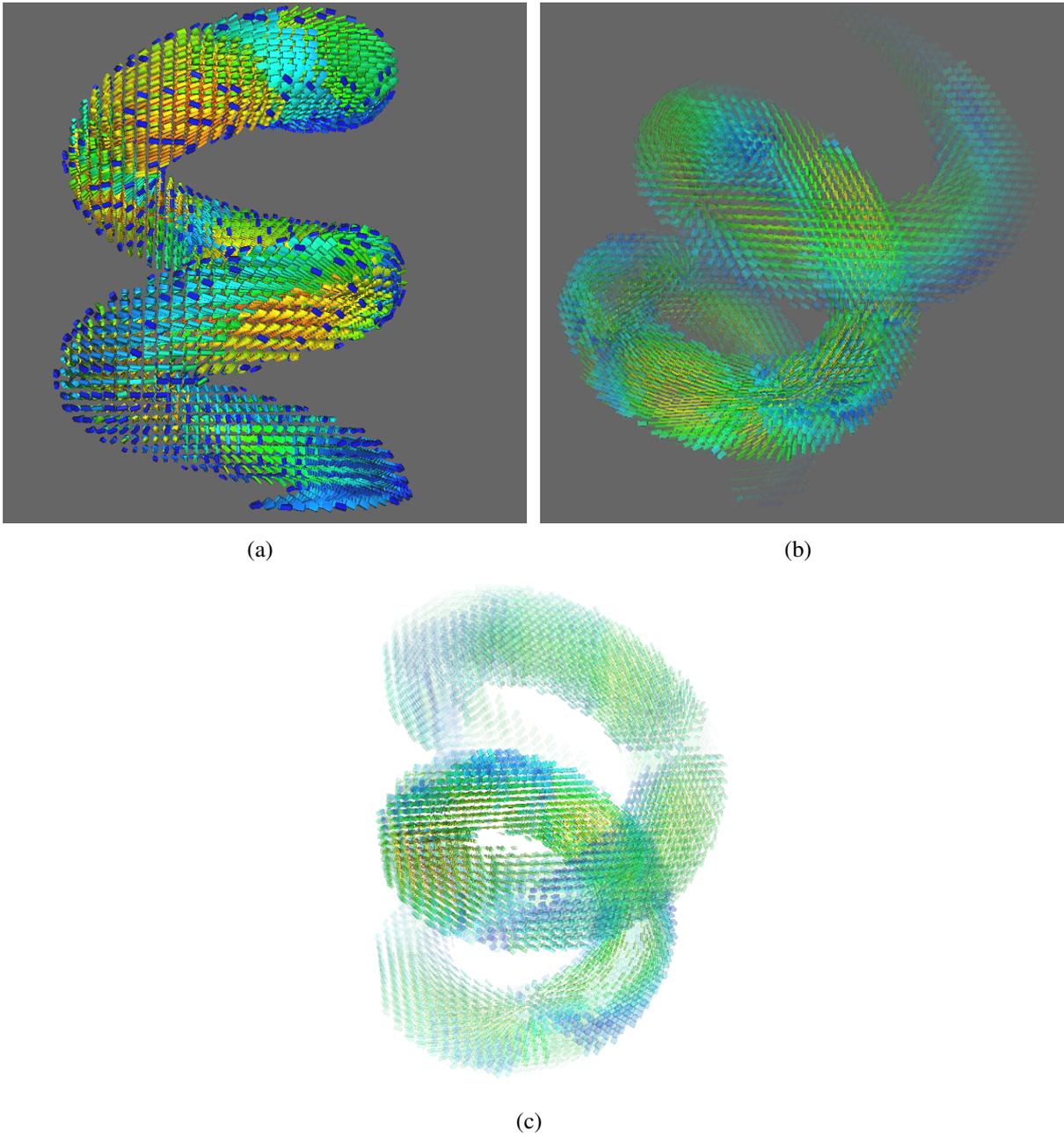


Figura 4.4: Campo com $\alpha_{max} = \alpha_{elip} = 60^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.

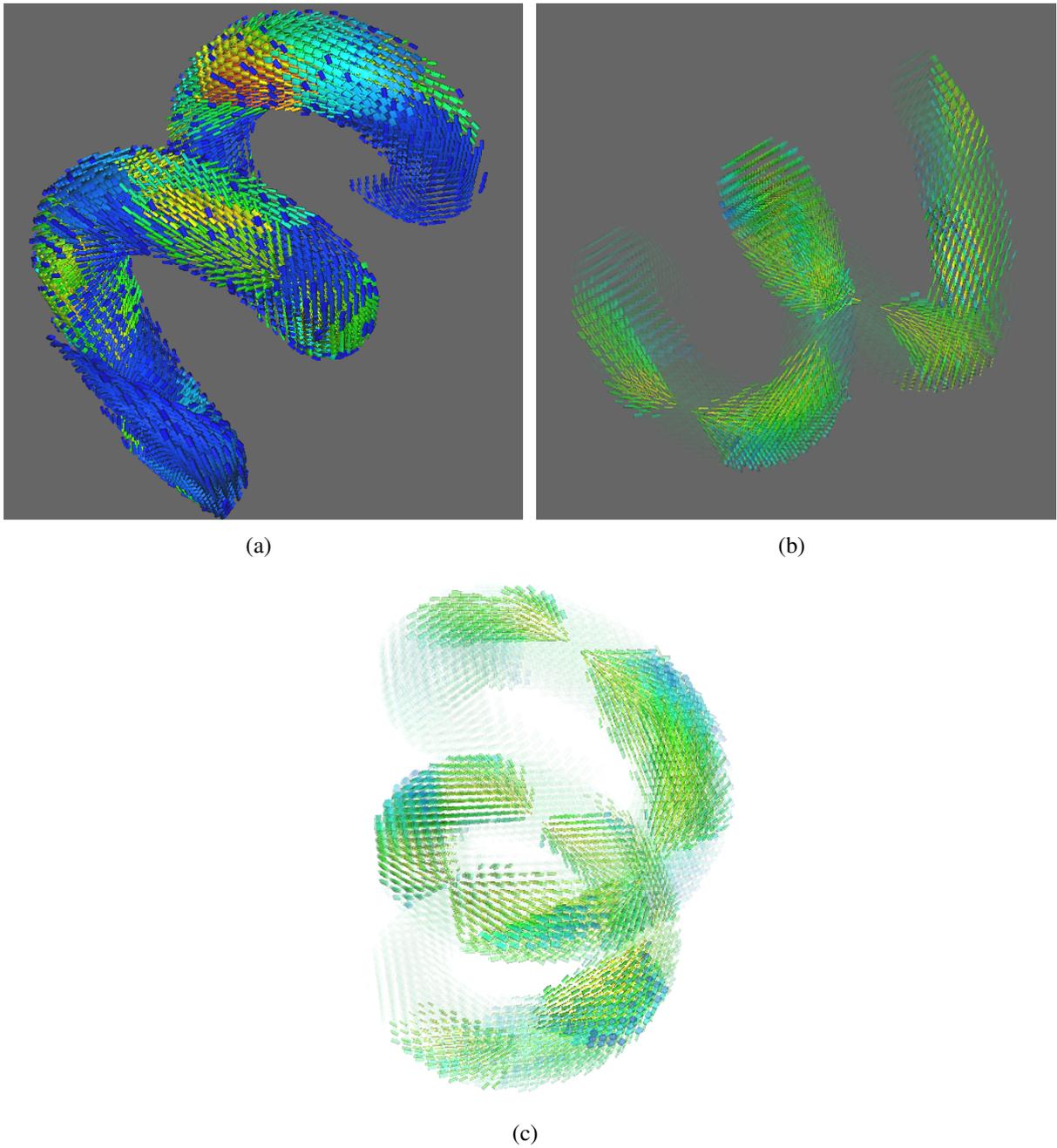


Figura 4.5: Campo com $\alpha_{max} = 30^\circ$ e $\alpha_{elip} = 60^\circ$: (a) fundo cinza, (b) fundo cinza com transparência, (c) fundo branco com transparência.

5 *Conclusão*

Este trabalho apresentou um método para a acentuação de estruturas colineares em campos tensoriais baseada no processamento morfológico através da utilização de uma classe de elementos estruturantes.

O método proposto utiliza conhecimentos da área de morfologia matemática para a transformação do campo. Essa área é utilizada largamente para o processamento de imagens digitais. O ponto de maior importância da morfologia matemática é a utilização de um subconjunto bem definido, chamado de elemento estruturante. Partindo desse princípio, foi criada uma família de elementos estruturantes elípticos, que têm a função de processar morfológicamente o campo.

A definição do elemento estruturante é feita através de parâmetros que modificam sua forma e conseqüentemente o resultado de aplicação. É feita uma demonstração dos diferentes elementos gerados com a variação desses parâmetros.

Foi demonstrado a característica de acumulação de influência que o operador tensorial elíptico possui. Esse fato, torna irrelevante a ordem de aplicação dos elementos, o que gera flexibilidade.

O método foi testado através do processamento de um campo helicoidal que é gerado artificialmente. Os resultados obtidos foram satisfatórios, o que mostra que o método é promissor, porém existem dificuldades. Um dos grandes problemas enfrentados é a escolha dos parâmetros adequados a cada região de aplicação do campo a ser modificado. Outro obstáculo é a dificuldade na visualização dos resultados de forma a se poder validar a transformação no campo, através dos parâmetros utilizados.

Como trabalho futuro, pretende-se definir uma forma mais simples e unificada de validação dos parâmetros. Outro possível avanço, seria na definição automática dos parâmetros para cada região do campo a ser modificada. Pode-se ainda, definir outros tipos de elementos e formas de aplicação afim de se obter novas operações morfológicas em campos tensoriais utilizando abordagens similares às tratadas nesta monografia.

Referências Bibliográficas

BASSER, P.; MATTIELLO, J.; LEBIHAN, D. Mr diffusion tensor spectroscopy and imaging. *Biophysical Journal*, v. 66, n. 1, p. 259 – 267, 1994. ISSN 0006-3495. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B94RW-4V8RX5Y-12/2/36ce2e0578f0d9aa71694d152b118e56>>.

DANIELSON, D. A. *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*. 2. ed. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1996.

GONZALEZ, R. E. W. R. C. *Processamento Digital de Imagens*. 3. ed. [S.l.]: Pearson / Prentice Hall (Grupo Pearson), 2010.

GULLBERG, G. et al. Tensor tomography. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, v. 46, n. 4, p. 991 –1000, ago. 1999. ISSN 0018-9499.

KINDLMANN, G. Superquadric tensor glyphs. In: *Proceedings of IEEE TVCG/EG Symposium on Visualization 2004*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 147–154.

KOLECKI, J. *An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering*. [S.l.], September 2002. Disponível em: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/Numbers/Math/documents/Tensors_TM2002211716.pdf>.

LEE, M.-S.; MEDIONI, G. Grouping \cdot , $-$, \rightarrow , 0 - \cdot , into regions, curves, and junctions. *Comput. Vis. Image Underst.*, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, v. 76, p. 54–69, October 1999. ISSN 1077-3142. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=333806.333811>>.

VIEIRA, M. B. *Inferência de orientação de dados esparsos para reconstrução de superfícies*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais e Université de Cergy-Pontoise, 2002.

WESTIN, C.-F. *A Tensor Framework for Multidimensional Signal Processing*. Tese (Doutorado) — Linköping University, Sweden, S-581 83 Linköping, Sweden, 1994. Dissertation No 348, ISBN 91-7871-421-4.