

Roger Correia Pinheiro Silva

**Iluminação Global em Ambientes
Tridimensionais Utilizando Radiosidade**

Juiz de Fora

4/12/2008

Roger Correia Pinheiro Silva

Iluminação Global em Ambientes Tridimensionais Utilizando Radiosidade

Orientador:
Marcelo Bernardes Vieira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Juiz de Fora

4/12/2008

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação

Prof. Marcelo Bernardes Vieira, D. Sc.
Orientador

Prof. Marcelo Lobosco, D. Sc.

Prof^a. Kele Teixeira Belloze, M. Sc.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 7
1.1	Iluminação Global e Iluminação Local	p. 7
1.2	Objetivos	p. 8
1.3	Visão Geral	p. 9
2	Modelo Físico-Matemático da Luz	p. 10
2.1	Radiometria	p. 10
2.2	Espalhamento da Luz	p. 12
2.2.1	BRDF	p. 12
2.2.2	Reflectância	p. 14
2.2.3	Reflexão Difusa	p. 14
2.2.4	Reflexão Especular	p. 15
2.2.5	BRDF para o Modelo Modificado de Phong	p. 16
2.3	Equação de Renderização	p. 17
3	Método de Radiosidade	p. 18
3.1	Fatores de Forma	p. 19
3.1.1	Propriedades dos Fatores de Forma	p. 21
3.1.2	Determinando Fatores de Forma	p. 21
3.1.2.1	Abordagem Simplificada	p. 21
3.1.2.2	Analogia de Nusselt	p. 22

3.1.2.3	O Hemicubo	p. 23
3.2	Equação de Radiosidade	p. 24
3.2.1	Resolvendo a Equação de Radiosidade	p. 26
3.2.1.1	Jacobi	p. 27
3.2.1.2	Gauss-Seidel	p. 27
3.2.1.3	Southwell	p. 27
3.3	Breve Comparativo entre Traçado de Raios e Radiosidade	p. 28
4	Modelo Computacional e Resultados	p. 29
4.1	Modelo Computacional	p. 29
4.2	Resultados	p. 31
5	Conclusão	p. 35
	Referências	p. 36

Lista de Figuras

1	Resultados da aplicação de algoritmos de iluminação local e iluminação global para uma mesma cena (ELIAS, 2000).	p. 8
2	Ângulo bidimensional e ângulo sólido (ASHDOWN, 1994).	p. 11
3	Radiância é definida como fluxo radiante, Φ , por unidade de ângulo sólido, $d\vec{\omega}$, por unidade de área projetada, dA (ASHDOWN, 1994).	p. 12
4	Reflexão difusa ideal. A luz é refletida em todas as direções com a mesma intensidade, independente do ângulo de incidência (JENSEN, 2001).	p. 14
5	A reflexão especular glossy ocorre em superfícies com algum grau de imperfeição (rugosidade). Na reflexão especular perfeita, que ocorre em superfícies lisas, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (JENSEN, 2001).	p. 16
6	Exemplo de cena renderizada com radiosidade (JOHN, 2003).	p. 18
7	Modelo com superfícies subdivididas em patches (JOHN, 2003).	p. 19
8	Geometria do fator de forma entre dois patches infinitesimais (ASHDOWN, 1994).	p. 20
9	Geometria do fator de forma entre elemento diferencial dA_i e o patch A_j (ASHDOWN, 1994).	p. 22
10	Analogia de Nusselt (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).	p. 23
11	Projeção de um patch nas células do hemicubo (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).	p. 24
12	Geometria do fator de forma para células do hemicubo (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).	p. 24

13	Cena com uma fonte de luz amarela e patches pretos, com reflectância 0,5. Em (a) a divisão entre os patches aparecem destacadas. Em (b) a subdivisões das superfícies estão suavizadas em decorrência da interpolação bilinear nos patches.	p. 31
14	Patches alaranjados, consequência da iteração entre uma fonte de luz vermelha e outra amarela, exibindo efeito de interferência de cor.	p. 31
15	Cena com suaves variações de tonalidade cinza, criando efeito de sombreamento.	p. 32
16	A coloração da parede esquerda mostra a interferência de cor entre a fonte de luz verde e a azul, que confere a cena um tom ciano.	p. 32
17	A fonte de luz no teto é composta por 40 quadrados(80 patches). Modelo exibe a aplicação da interpolação bilinear em modelo refinado, composto por 5760 patches.	p. 33
18	Cena mostra dois modelos gerados com o mesmo número de iterações. Na imagem (a), entretanto, a reflectância dos patches é de 0,3. Em (b) a reflectância é de 0,7 e a cena é de modo geral mais clara, com mais brilho nas superfícies.	p. 33
19	Evolução da distribuição de energia luminosa no ambiente. Imagens do modelo com 0, 4, 8 e 16 iterações.	p. 34

1 *Introdução*

A síntese de imagens por computador está presente em nossa rotina. Vemos essas imagens em filmes, em jogos e em aplicações de diversas áreas do conhecimento, como engenharia, medicina, astronomia, arquitetura, física, entre outras. Para várias dessas aplicações, imagens sintéticas são suficientes, ou mesmo desejáveis. Para outras, entretanto, busca-se realismo. Na Computação Gráfica existe um esforço contínuo para obtenção de imagens realistas, cada vez menos distinguíveis das imagens do mundo real.

Segundo (COHEN; MANSSOUR, 2006):

No mundo real, para que seja possível enxergar objetos em um ambiente, é fundamental que exista pelo menos uma fonte de luz. De forma simplificada, objetos são visíveis porque refletem raios de luz. Portanto, a noção de uma cena tridimensional com realismo está intimamente ligada à idéia de iluminação. Como na Computação Gráfica procura-se simular o que acontece na realidade, é necessário incluir fontes de luz no ambiente virtual e descrever como será a interação dessas fontes com os demais objetos da cena.

A geração de imagens realistas por computador envolve o entendimento sobre a forma como a luz se espalha pelo ambiente, e como ela interage com diversos tipos de materiais; envolve entendimento da natureza física da luz e de seu modelo matemático. Em suma: gerar imagens realistas é necessariamente simular o comportamento da luz através da máquina.

O problema abordado nessa monografia é a troca de energia luminosa entre uma fonte de luz e objetos da cena, e também a troca indireta que ocorre entre os objetos. A resolução do mesmo confere realismo à imagem gerada.

1.1 **Iluminação Global e Iluminação Local**

Por iluminação local entende-se apenas a iluminação direta, ou seja, a interação entre a luz proveniente da fonte luminosa e cada objeto da cena. Não são consideradas interações

entre os objetos, como inter-reflexões ou transmissão. A iluminação global, além da iluminação direta, considera a luz que atinge um objeto após ser refletida por um outro objeto da cena (isto é, a inter-reflexão). Imagens renderizadas com o uso de algoritmos de iluminação global possuem aspecto mais realista que aquelas geradas com algoritmos de iluminação local; entretanto, elas também são computacionalmente mais caras.

Dois dos principais métodos que foram desenvolvidos para modelagem da luz em computador são o Traçado de Raios e Radiosidade.

O Traçado de Raios modela raios de luz viajando dos olhos até a fonte de luz. Enquanto os raios viajam, eles podem ser bloqueados, podem ser refletidos ou sofrer refração de acordo com as leis clássicas da óptica. Em especial, esse método modela reflexões especulares e efeitos de refração eficientemente.

Radiosidade é um método mais recente. Sistemas de radiosidade modelam a inter-reflexão da luz; eles dividem o espaço em pequenas superfícies difusas e então resolvem um sistema de equações lineares para calcular a quantidade de luz que chega a cada superfície. Radiosidade modela com acurácia fontes de luz não-pontuais, interferências de cor entre objetos e efeitos realistas de sombra.

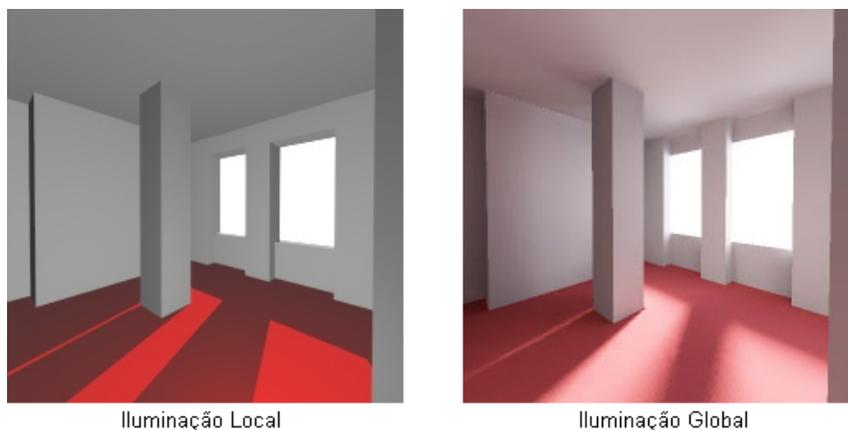


Figura 1: Resultados da aplicação de algoritmos de iluminação local e iluminação global para uma mesma cena (ELIAS, 2000).

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar, desenvolver e aplicar o método de Radiosidade. Isto implica compreender as grandezas físicas usadas para descrever a luz, bem como o modelo físico-matemático usado para retratar seu transporte e interação com diversos tipos de materiais.

O objetivo secundário é aplicar Radiosidade em cenas tridimensionais que possuem geometria e topologia complexas. Dada a complexidade de tempo de algoritmos de iluminação global, também é objetivo renderizar imagens com Radiosidade rapidamente.

1.3 Visão Geral

Essa monografia está organizada de forma a conduzir o leitor do conhecimento físico necessário ao tema à modelagem computacional de distribuição da luz. Os pontos-chave abordados primeiro capítulo são o conceito de radiância, BRDF e a equação de renderização. O capítulo seguinte é mais específico sobre radiosidade, e os pontos mais importantes são o cálculo de fatores de forma e a resolução de sistemas lineares. O capítulo quatro descreve o modelo computacional criado para aplicação do método de radiosidade e mostra alguns resultados gerados com o mesmo. Por fim, a conclusão analisa os resultados obtidos e indica o que pode ser melhorado na aplicação desenvolvida.

2 *Modelo Físico-Matemático da Luz*

Entender como a luz se espalha pelo ambiente é essencial para simular corretamente a iluminação de uma cena; algoritmos de iluminação global buscam imitar a forma como esse espalhamento ocorre.

Este capítulo está dividido em três seções. A primeira apresenta a terminologia e os conceitos usados para descrever e medir a luz. A segunda trata do comportamento da luz na interação com superfícies de diversos tipos de materiais. A terceira, e mais importante, faz uso do conhecimento adquirido nas seções anteriores para apresentar a equação de renderização, equação fundamental que todos os algoritmos de iluminação global procuram resolver.

2.1 Radiometria

A radiometria é um ramo da física que se dedica ao estudo da transferência de radiação eletromagnética. Usamos as grandezas radiométricas para medir e descrever a luz.

A quantidade básica de iluminação é o o fóton. A energia e_λ de um fóton com comprimento de onda λ é

$$e_\lambda = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.1)$$

onde $h \approx 6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ é a constante de Planck, e c é a velocidade da luz (no vácuo, $c = 299.792.458 m/s$).

A *energia radiante espectral*, Q_λ , em n_λ fótons com comprimento de onda λ é

$$Q_\lambda = n_\lambda e_\lambda = n_\lambda \frac{hc}{\lambda} \quad (2.2)$$

medida em J/nm .

A *energia radiante*, Q , é a energia de uma coleção de fótons. É computada pela

integral da energia espectral sobre todos os comprimentos de onda. É medida em J .

$$Q = \int_0^{\infty} Q_{\lambda} d\lambda \quad (2.3)$$

O *fluxo radiante*, Φ , expressa a variação de energia radiante no tempo. É medido em W .

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.4)$$

A *densidade de fluxo radiante* é definida como o quociente do fluxo radiante pela área da superfície. Ela é comumente dividida em *radiosidade*, B , que é o fluxo que abandona uma superfície em um ponto x , e *irradiância*, E , que é o fluxo que chega à superfície em um ponto x . É medida em W/m^2 .

$$B(x) = E(x) = \frac{d\Phi}{dA} \quad (2.5)$$

A próxima grandeza a ser definida é a intensidade radiante. No entanto, para defini-la com clareza é necessário conhecer o conceito de ângulo sólido.

Um ângulo sólido é o análogo tridimensional de um ângulo bidimensional. Um ângulo bidimensional θ pode ser medido em termos da relação entre o comprimento de um arco de circunferência e o raio desta.

Similarmente, um ângulo sólido ω pode ser medido em termos da relação entre a área delimitada pela interseção do cone que se origina no centro de uma esfera com a superfície da mesma e o raio ao quadrado desta esfera. Enquanto um ângulo bidimensional é medido em radianos, o ângulo sólido é medido em esferoradianos, ou *esterradianos* (sr).

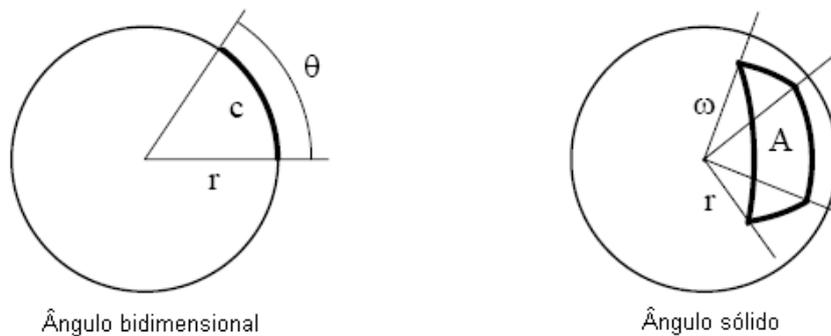


Figura 2: Ângulo bidimensional e ângulo sólido (ASHDOWN, 1994).

A *intensidade radiante*, I , representa o fluxo radiante em determinada direção. É dada

pelo diferencial do fluxo radiante por unidade de ângulo sólido. Medida em W/sr .

$$I = \frac{d\Phi}{d\vec{w}} \quad (2.6)$$

A grandeza radiométrica mais importante é a *radiância*, L . A radiância em um ponto x , na direção \vec{w} é definida como o fluxo radiante por unidade de ângulo sólido por unidade de área projetada:

$$L(x, \vec{w}) = \frac{d^2\Phi}{\cos\theta \, dA \, d\vec{w}} \quad (2.7)$$

A radiância pode ser pensada como o número de fótons que chegam por tempo à uma pequena área, de uma determinada direção, e pode ser usada para descrever a intensidade de luz em um ponto do espaço em determinada direção.

É importante esclarecer que diferente da densidade de fluxo radiante, a radiância não distingue o fluxo incidente do fluxo que abandona uma superfície. De acordo com a definição formal de radiância o fluxo pode estar incidindo, atravessando ou abandonando a superfície.

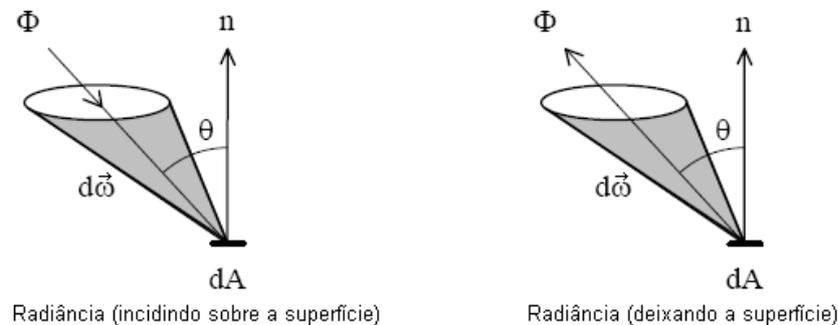


Figura 3: Radiância é definida como fluxo radiante, Φ , por unidade de ângulo sólido, $d\vec{w}$, por unidade de área projetada, dA (ASHDOWN, 1994).

2.2 Espalhamento da Luz

Esta seção descreve ferramentas para modelar a interação da luz com superfícies. Ela trata da iluminação direta entre fonte de luz e objetos, isto é, da *iluminação local*.

2.2.1 BRDF

Em geral, quando a luz interage com matéria, ocorre uma dinâmica complicada. Essa interação depende das características físicas da luz, assim como da composição física da

matéria. Uma superfície rugosa e opaca, por exemplo, irá refletir luz de forma diferente de uma superfície lisa como a de um espelho.

Quando um raio de luz atinge uma superfície em um ponto qualquer, seus fótons podem ser refletidos, absorvidos ou transmitidos, isto é, uma porção da luz incidente é refletida, uma segunda porção é transmitida e uma terceira é absorvida pelo meio. Para materiais opacos, a maior parte dos fótons é refletida ou absorvida (WYNN, 2000).

Uma BRDF (*Bidirectional Reflectance Distribution Function*) descreve quanto da luz incidente é refletida quando a mesma faz contato com determinado material. Denotada por f_r , é dada pela razão entre radiância refletida e irradiância:

$$f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) = \frac{dL_r(x, \vec{w})}{dE_i(x, \vec{w}')} \quad (2.8)$$

onde x é o ponto da superfície onde ocorre contato com a luz, w' é a direção de incidência e w é a direção de reflexão.

A irradiância $dE_i(x, w')$ pode ser escrita como a radiância que incide no ponto x , vinda da direção w' :

$$dE_i(x, \vec{w}') = L_i(x, \vec{w}')(\vec{w}' \cdot \vec{n})d\vec{w}' \quad (2.9)$$

Onde \vec{n} é a normal no ponto x . Notar que $(\vec{w}' \cdot \vec{n}) = \cos \theta$. Dessa forma, a Equação 2.8 pode ser reescrita:

$$f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) = \frac{dL_r(x, \vec{w})}{L_i(x, w') (\vec{w}' \cdot \vec{n}) d\vec{w}'} \quad (2.10)$$

É possível calcular a radiância refletida em todas as direções se o campo de radiância incidente em determinado ponto da superfície é conhecido. Basta isolar a radiância refletida na equação da BRDF e integrar sobre a radiância incidente:

$$L_r(x, \vec{w}') = \int_{\Omega} f_r(x, \vec{w}', \vec{w})dE_i(x, \vec{w}') = \int_{\Omega} f_r(x, \vec{w}', \vec{w})L_i(x, w') (\vec{w}' \cdot \vec{n}) d\vec{w}' \quad (2.11)$$

Aqui, \vec{n} é a normal à superfície no ponto x , e Ω é o hemisfério de direções incidentes em x .

Há duas propriedades importantes para uma BRDF. A primeira é a lei de reciprocidade; esta lei afirma que a inversão do sentido no qual a luz viaja não altera a BRDF:

$$f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) = f_r(x, \vec{w}, \vec{w}') \quad (2.12)$$

A segunda propriedade diz respeito à conservação de energia. Uma superfície não pode refletir mais energia do que recebe. Dessa forma, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$\int_{\Omega} f_r(x, \vec{w}', \vec{w})(\vec{w}' \cdot \vec{n}) d\vec{w}' < 1, \forall \vec{w}. \quad (2.13)$$

2.2.2 Reflectância

Para medir a quantidade de luz refletida por uma superfície podemos usar a razão entre o fluxo refletido e o fluxo incidente. Essa razão é chamada *reflectância*, ρ .

$$\rho(x) = \frac{d\Phi_r(x)}{d\Phi_i(x)} \quad (2.14)$$

2.2.3 Reflexão Difusa

Uma superfície é dita difusa quando possui a característica de refletir luz em todas as direções. Esse tipo de reflexão geralmente ocorre em superfícies rugosas.



Figura 4: Reflexão difusa ideal. A luz é refletida em todas as direções com a mesma intensidade, independente do ângulo de incidência (JENSEN, 2001).

Um caso especial de reflexão difusa é a reflexão Lambertiana, ou reflexão difusa ideal. Nesse tipo de reflexão, não importa o ângulo com o qual um raio de luz atinja a superfície: a radiância refletida é constante, é a mesma em todas as direções. Isso leva a uma BRDF, $f_{r,d}(x)$, constante. Da Equação 2.11 vem:

$$L_r(x, \vec{w}') = f_{r,d}(x) \int_{\Omega} dE_i(x, \vec{w}) = f_{r,d}(x) E_i(x) \quad (2.15)$$

A reflectância, ρ_d , para uma superfície lambertiana pode então ser calculada:

$$\rho_d(x) = \frac{d\Phi_r(x)}{d\Phi_i(x)} = \frac{L_r(x) dA \int_{\Omega} d\vec{w}}{E_i(x) dA} = \pi f_{r,d}(x) \quad (2.16)$$

onde $\int_{\Omega} d\vec{w} = \pi$.

A direção em que a luz é refletida é perfeitamente randômica para superfícies Lambertianas. Dados dois números aleatórios uniformemente distribuídos, ξ_1 e $\xi_2 \in [0, 1]$, a direção de reflexão \vec{w}_d , é distribuída como:

$$\vec{w}_d = (\theta, \phi) = (\cos^{-1}(\sqrt{\xi_1}), 2\pi\xi_2), \quad (2.17)$$

onde (θ, ϕ) são coordenadas esféricas: θ é o ângulo com a normal à superfície e ϕ é a rotação em volta da normal.

2.2.4 Reflexão Especular

A reflexão especular acontece quando a luz atinge uma superfície lisa, como superfícies metálicas, água ou vidro. A maioria das superfícies possuem imperfeições, razão pela qual a luz é refletida como um pequeno cone ao redor da direção de reflexão especular. O grau de imperfeição é comumente um parâmetro nos modelos de reflexão, e essas superfícies imperfeitas são chamadas *glossy* (JENSEN, 2001). Para superfícies perfeitamente lisas, o ângulo de incidência é o mesmo de reflexão, e a luz é refletida em somente uma direção; nesse caso ocorre a reflexão especular perfeita.

A radiância refletida devido à reflexão especular é:

$$L_r(x, \vec{w}_s) = \rho_s(x)L_i(x, \vec{w}') \quad (2.18)$$

Para reflexão especular perfeita, a direção de reflexão, \vec{w}'_s , é:

$$\vec{w}'_s = 2(\vec{w}' \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{w}' \quad (2.19)$$

É possível expressar a reflexão especular perfeita como uma BRDF usando coordenadas esféricas:

$$f_{r,s}(x, \vec{w}', \vec{w}) = 2\rho_s\delta(\sin^2\theta' - \sin^2\theta)\delta(\phi' - \phi \pm \pi) \quad (2.20)$$

onde a função delta de Dirac, $\delta(x)$, é usada para limitar a direção na qual a BRDF é diferente de zero ($\delta(x)$ é diferente de zero somente quando $x = 0$).

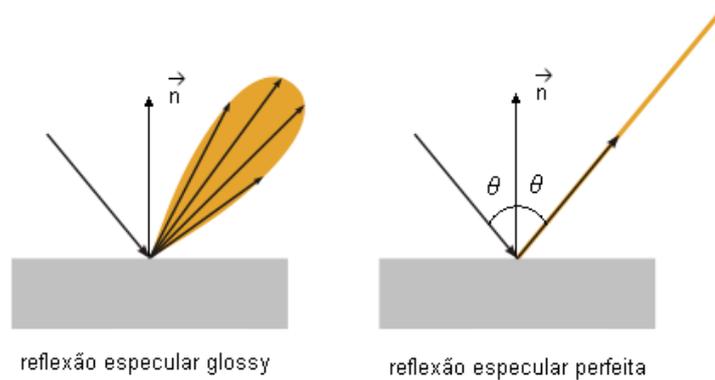


Figura 5: A reflexão especular glossy ocorre em superfícies com algum grau de imperfeição (rugosidade). Na reflexão especular perfeita, que ocorre em superfícies lisas, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (JENSEN, 2001).

2.2.5 BRDF para o Modelo Modificado de Phong

A maioria dos materiais reflete luz de maneira complexa, que não pode ser descrita apenas através da reflexão lambertiana ou da reflexão especular perfeita. Como consequência, diversos modelos de iluminação local foram propostos buscando proximidade da aparência real dos materiais.

Os primeiros modelos, como o modelo de Phong, não possuíam base física. Entre os vários modelos que foram propostos e que possuem embasamento físico, um dos mais conhecidos é o modelo de microfacetas de Torrance-Sparrow, trazido para a computação gráfica por (BLINN, 1977). Outro modelo interessante é o de (SCHLICK, 1994). Neste trabalho é apresentado o modelo de Phong modificado, conforme é descrito por (LAFORTUNE; WILLEMS, 1994). A modificação torna o modelo fisicamente plausível, expressando a iluminação local como uma BRDF válida, isto é, uma BRDF que respeita as leis de reciprocidade e conservação de energia.

O modelo é escrito como a soma de uma componente Lambertiana, $f_{r,d}$, e uma componente especular dispersa em torno da reflexão especular perfeita, $f_{r,e}$:

$$f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) = f_{r,d}(x, \vec{w}', \vec{w}) + f_{r,e}(x, \vec{w}', \vec{w}) \quad (2.21)$$

Reescrevendo a Equação 2.21:

$$f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) = \frac{\rho_d}{\pi} + \rho_e \frac{n+2}{2\pi} \cos^n \alpha \quad (2.22)$$

onde:

- α é o ângulo entre a direção de reflexão especular perfeita e a direção de reflexão.
- ρ_d é a reflectância difusa.
- ρ_e é a reflectância especular.
- n é o expoente especular (valores grandes para n significam uma maior reflexão especular).

A direção de reflexão para a componente Lambertiana já foi apresentada neste trabalho. A direção de reflexão para a componente especular também é calculada por uma distribuição uniforme. Dados dois números ξ_1 e $\xi_2 \in [0, 1]$, a direção \vec{w}' é dada por:

$$\vec{w}' = (\alpha, \phi) = (\cos^{-1}(\xi_1^{\frac{1}{n+1}}), 2\pi\xi_2) \quad (2.23)$$

2.3 Equação de Renderização

A equação de renderização é a base matemática para todos os algoritmos de iluminação global (JENSEN, 2001). Ela expressa as condições necessárias para o equilíbrio do transporte de luz em modelos sem meio participativo e pode ser usada para calcular a radiância que abandona qualquer superfície em um modelo (cena). A radiância que abandona a superfície, L_o , é a soma da radiância emitida, L_e , e da radiância refletida, L_r :

$$L_o(x, \vec{w}) = L_e(x, \vec{w}) + L_r(x, \vec{w}) \quad (2.24)$$

A Equação 2.11 pode ser utilizada para expressar a radiância refletida, L_r :

$$L_o(x, \vec{w}) = L_e(x, \vec{w}) + \int_{\Omega} f_r(x, \vec{w}', \vec{w}) L_i(x, w') (\vec{w}' \cdot \vec{n}) d\vec{w}' \quad (2.25)$$

Essa é a equação de renderização na forma que é comumente usada pelo traçado de raios. Ela será retomada no capítulo seguinte, onde será adequada ao método de radiosidade.

3 *Método de Radiosidade*

Enquanto o traçado de raios simula o espalhamento (reflexão e refração) de raios de luz entre superfícies para calcular a iluminação direta e indireta de uma cena, o método de radiosidade, descrito pela primeira vez por (GORAL et al., 1984), utiliza uma idéia mais simples: ele trabalha apenas com a distribuição da energia na cena, isto é, busca o equilíbrio de troca de energia luminosa entre as superfícies. Essa distribuição de energia simula a maneira como a natureza, de fato, distribui luz.



Figura 6: Exemplo de cena renderizada com radiosidade (JOHN, 2003).

Para resolver o problema de iluminação global de um modelo por radiosidade, assume-se as seguintes simplificações:

- todas as superfícies são consideradas difusoras ideais (Lambertianas).
- a fonte de luz é considerada emissora difusora ideal (isto é, emite luz com a mesma intensidade em todas as direções).
- cada superfície é subdividida em uma série de retalhos, chamados de *patches*.
- cada *patch* tem radiosidade constante.

Assumir que todas as superfícies são refletoras Lambertianas é muito importante. Como já discutido neste trabalho, essas superfícies refletem luz em todas as direções com

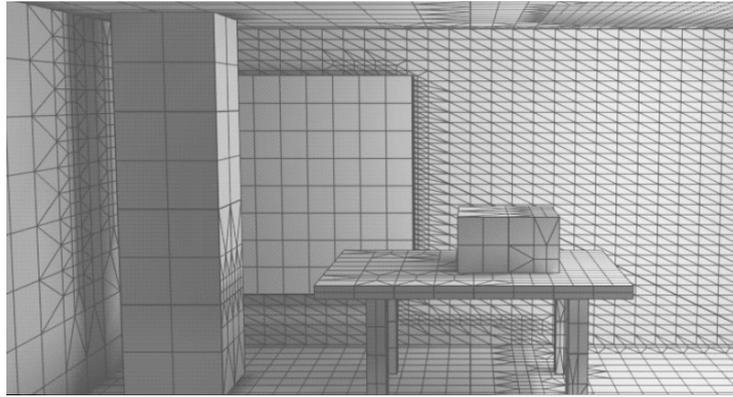


Figura 7: Modelo com superfícies subdivididas em patches (JOHN, 2003).

a mesma intensidade, independente do ângulo de incidência com o qual os raios de luz atinjam as mesmas. Isso faz com que o total de luz refletida por um patch seja igual ao produto da quantidade de luz incidente ao mesmo pela sua reflectância.

Em linhas gerais, a distribuição de luz pela cena acontece como segue.

A fonte emite luz no ambiente. Cada patch absorve certa quantidade de luz, e reflete a quantidade restante de volta à cena. Como a luz é refletida em todas as direções com a mesma intensidade, os patches são considerados emissores secundários. Os patches que recebem a luz refletida absorvem uma determinada quantidade de luz, e por sua vez, refletem a luz uma segunda vez. Seguem-se diversas e simultâneas reflexões em cada patch, até que a luz é totalmente absorvida, e a distribuição de energia pela cena está completa. Ao final do processo, cada patch contém a informação sobre quantidade de luz que flui sobre si próprio.

Para detalhar a radiosidade, este capítulo está dividido em duas seções. A seção seguinte trata dos *fatores de forma*, que determinam a porção de fluxo radiante que é emitido por um patch e chega a outro. A seção posterior apresenta a equação de radiosidade, uma adaptação da equação de renderização.

3.1 Fatores de Forma

Já é conhecido que um patch emite a mesma quantidade de energia em todas as direções. É necessário saber, então, quanto da energia emitida incide sobre um segundo patch, considerando a disposição, a forma e a orientação dos dois patches no espaço.

Um fator de forma, dado por Φ_{ij}/Φ_i (onde Φ_{ij} é o fluxo que deixa i e chega à j , e Φ_i é o fluxo total emitido por i), e denotado por F_{ij} , é uma constante que representa a

fração energia que abandona o patch i e chega ao patch j .

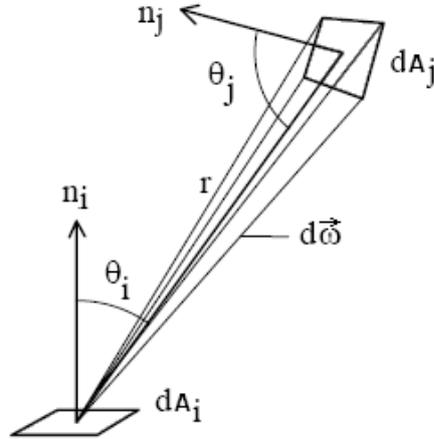


Figura 8: Geometria do fator de forma entre dois patches infinitesimais (ASHDOWN, 1994).

O ângulo sólido $d\vec{\omega}$ entre dois patches infinitesimais i e j , com origem em i é:

$$d\vec{\omega} = \frac{\cos \theta_j dA_j}{r^2} \quad (3.1)$$

Da Equação 2.7, é possível escrever o fluxo diferencial Φ_{ij} como:

$$\Phi_{ij} = L_i \cos \theta_i dA_i d\vec{\omega} \quad (3.2)$$

Substituindo a Equação 3.1 em 3.2, vem:

$$\Phi_{ij} = \frac{L_i \cos \theta_i \cos \theta_j dA_i dA_j}{r^2} \quad (3.3)$$

Como dA_i pode ser considerado um emissor Lambertiano, o fluxo total emitido por i , Φ_i , é dado por:

$$\Phi_i = B_i dA_i = \pi L_i dA_i \quad (3.4)$$

O fator de forma $dF_{A_i A_j}$ para dois patches diferenciais é:

$$dF_{A_i A_j} = \frac{L_i \cos \theta_i \cos \theta_j dA_i dA_j}{\pi L_i dA_i r^2} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dA_j}{\pi r^2} \quad (3.5)$$

O próximo passo é calcular o fator de forma entre o patch diferencial dA_i e o patch A_j . Isso é feito através da integração da Equação 3.5 .

$$F_{dA_i A_j} = \int_{A_j} dF_{A_i A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dA_j}{\pi r^2} \quad (3.6)$$

Finalmente, o fator de forma entre dois patches é conseguido através da integração sobre A_j .

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j dA_i \quad (3.7)$$

É comum adicionar à equação de cálculo de fator de forma um termo que indica se dois patches são mutuamente visíveis, isto é, um termo V_{ij} que considera a oclusão de dois patches por um objeto ou superfície. A equação de fator de forma que leva em conta essa oclusão é

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} V_{ij} dA_j dA_i \quad (3.8)$$

3.1.1 Propriedades dos Fatores de Forma

Existem propriedades importantes para fatores de forma:

- $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$ para todo patch A_i em um ambiente fechado com n patches.
- o conceito de fator de forma assume que o meio que separa os patches não refrata, absorve ou espalha a luz, isto é, o meio é não-participativo.
- relação de reciprocidade: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$. Esta propriedade provê uma forma simples de calcular F_{ji} se F_{ij} é conhecido, dadas as áreas dos patches A_i e A_j .
- $F_{ii} = 0$ para polígonos convexos. Como a maioria dos algoritmos que implementam o método de radiosidade usa patches convexos, F_{ii} é sempre zero.

3.1.2 Determinando Fatores de Forma

Resolver analiticamente a equação para encontrar fatores de forma é uma tarefa complexa. De fato, é o maior desafio do método de radiosidade. Esta seção apresenta algumas alternativas para lidar com esse problema.

3.1.2.1 Abordagem Simplificada

É possível simplificar a Equação 3.7 considerando o fator de forma entre um elemento diferencial dA_i e um patch A_j , ou seja, o emissor é considerado uma fonte pontual de luz. A geometria dessa solução é mostrada na Figura 9.

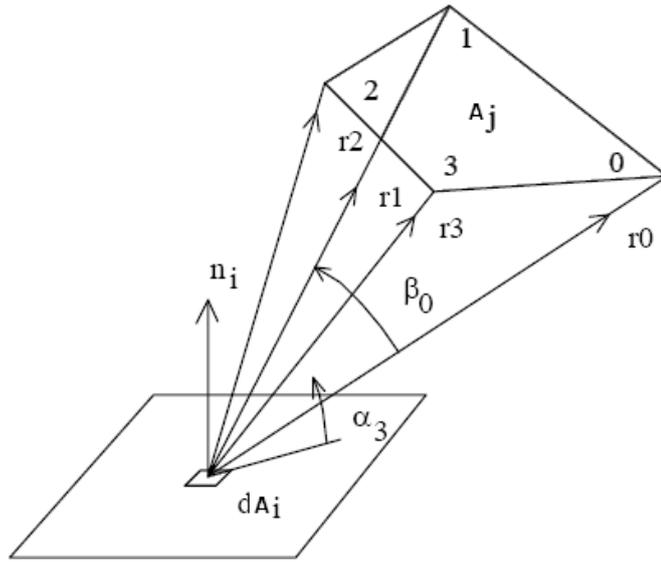


Figura 9: Geometria do fator de forma entre elemento diferencial dA_i e o patch A_j (ASH-DOWN, 1994).

O fator de forma $F_{dA_i A_j}$ pode ser calculado como

$$F_{dA_i A_j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k n_i \cdot (r_k \times r_{(k+1)\%n}) \quad (3.9)$$

onde n é o número de arestas do polígono, β_k é o ângulo em radianos entre os vetores r_k e $r_{(k+1)\%n}$ definido entre dA_i para cada par de vértices k e $(k+1)\%n$ ("%n" é o operador aritmético de módulo), e n_i é a normal à dA_i .

3.1.2.2 Analogia de Nusselt

Nusselt desenvolveu uma analogia geométrica que permite o cálculo apurado do fator de forma entre um ponto de uma superfície (uma área diferencial dA_i) e uma segunda superfície (um patch dA_j). A analogia consiste em empregar um hemisfério com raio unitário como corpo de projeção utilizado pelo patch diferencial dA_i . A área do patch A_j é projetada sobre a superfície do hemisfério, que em seguida é projetada sobre a base do mesmo. O fator de forma F_{ij} é dado, dessa forma, pelo quociente da área projetada na base do hemisfério pela área total da base do hemisfério, ou seja

$$F_{dA_i A_j} = \frac{A}{\pi r^2} = \frac{A}{\pi} \quad (3.10)$$

Para compreender como a analogia de Nusselt funciona, considere a Figura 8. O ângulo sólido $d\vec{w}$, descrito na Equação 3.1, descreve a projeção de dA_j sobre o hemisfério.

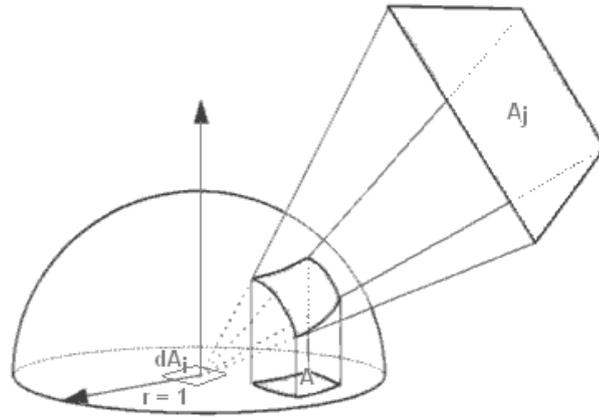


Figura 10: Analogia de Nusselt (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).

A projeção sobre a base do hemisfério é feita com a introdução do termo $\cos \theta_i$. A área diferencial dA pode ser calculada por

$$dA = \cos \theta_i d\vec{w} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dA_j}{r^2} \quad (3.11)$$

A área projetada A é calculada através da integração de dA sobre a área finita de A_j .

3.1.2.3 O Hemicubo

O hemicubo é um método de cálculo de fatores de forma bastante popular entre pesquisadores, introduzido na Computação Gráfica por (COHEN; GREENBERG, 1985). Ele utiliza a metade superior de um cubo como corpo de projeção, da mesma forma que ocorre com o hemisfério na analogia de Nusselt.

Cada face do hemicubo é subdividida em um conjunto de células, geralmente quadradas, que possuem um fator de forma pré-calculados e armazenados em uma tabela. Esses são chamados *fatores de forma delta*. Para calcular o fator de forma entre um patch diferencial (um ponto) e um outro patch, projeta-se o último no hemicubo; o fator de forma procurado é dado pela soma dos fatores de forma delta das células cobertas pela projeção.

Os fatores de forma delta, ΔF , podem ser calculados através das mesmas equações utilizadas para a analogia de Nusselt.

O fator de forma ΔF_{topo} é

$$\Delta F_{topo} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} \Delta A_i = \frac{\Delta A_i}{\pi(x_i^2 + y_i^2 + 1)^2} \quad (3.12)$$

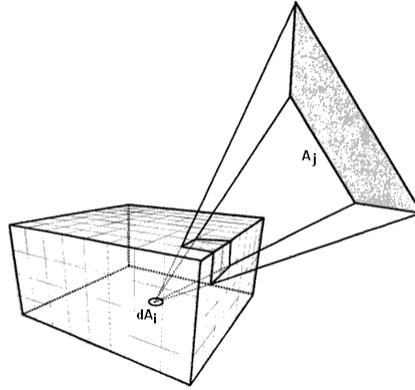


Figura 11: Projeção de um patch nas células do hemisfério (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).

onde ΔA_i é a área da célula hemisfério como fração da área total da superfície do hemisfério.

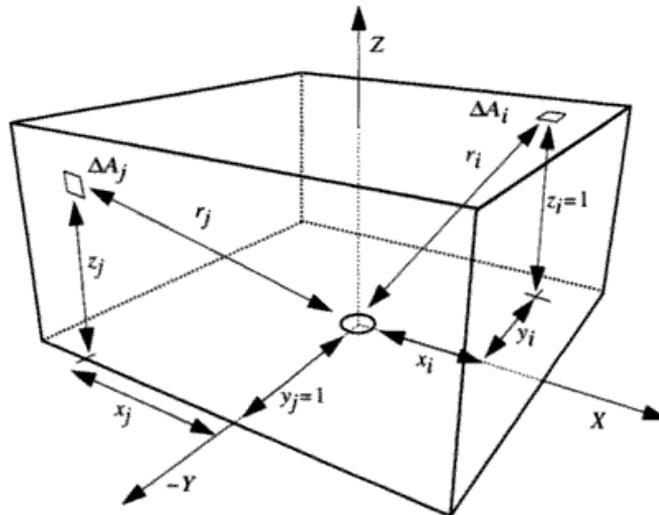


Figura 12: Geometria do fator de forma para células do hemisfério (COHEN; WALLACE; HANRAHAN, 1993).

De forma semelhante, o $\Delta F_{lateral}$, é:

$$\Delta F_{lateral} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} \Delta A_j = \frac{\Delta A_j}{\pi(x_j^2 + z_j^2 + 1)^2} \quad (3.13)$$

3.2 Equação de Radiação

Uma estratégia pra resolver a equação de renderização é simplificar o problema de iluminação global. Como já mostrado nesse trabalho, o método de radiação simplifica esse problema ao considerar todas as superfícies como refletoras Lambertianas, o que

implica em radiância constante sendo refletida em todas as direções. Dessa forma, é possível substituir a radiância na equação de renderização por um termo mais simples, a radiosidade B .

Para adequar a equação de renderização, escreve-se o ângulo sólido como

$$d\vec{w}' = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{n}')dA}{\|x - x'\|^2} \quad (3.14)$$

Onde x e x' são pontos de superfícies. Note que essa definição não é diferente daquela da Equação 3.1. Ela apenas usa outra notação.

O termo G é definido como:

$$G(x, x') = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{n}')(\vec{w}' \cdot \vec{n})}{\|x - x'\|^2} \quad (3.15)$$

Dessa forma, a equação de renderização é reescrita:

$$B(x) = B_e(x) + \int_S f_{r,d}(x)B(x')G(x, x')dA \quad (3.16)$$

Substituindo a BRDF $f_{r,d}(x)$ pela Equação 2.16 e rearranjando os termos:

$$B(x) = B_e(x) + \rho_d(x) \int_S B(x') \frac{G(x, x')}{\pi} dA \quad (3.17)$$

A discretização da integral de superfície é feita através de patches. Assim, a equação de radiosidade para um patch é dada por:

$$B_i = B_{ei} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} \quad (3.18)$$

onde:

- B_i é a radiosidade do patch i .
- B_{ei} é a radiosidade emitida pelo patch i .
- ρ_i é a reflectância do patch i .
- N é o número de patches no modelo.
- B_j é a radiosidade do patch j .
- F_{ij} é o fator de forma entre i e j .

Rearranjando os termos

$$B_{ei} = B_i - \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} \quad (3.19)$$

Resolver a equação de radiosidade para todos os patches do modelo implica resolver um sistema linear de n equações. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \\ \cdots \\ B_{en} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Observar que a equação de renderização, inicialmente complexa, foi reduzida à um sistema linear que envolve apenas reflectâncias, fatores de forma e radiosidade.

A maioria dos patches terá a radiância emitida igual à zero. Apenas aqueles patches que são fontes de luz são exceções. Além disso, como os patches são convexos, os fatores de forma F_{ii} serão nulos, o que significa que todos os elementos da diagonal principal da matriz valem a unidade.

O problema então é obter a radiosidade final B_i para cada patch i no modelo. Comumente, o sistema consiste de um número muito grande de patches. Por isso, métodos diretos de resolução de sistemas lineares, como a eliminação gaussiana, não são boas opções. Métodos iterativos, por outro lado, são indicados. Esses métodos têm garantia de convergência, já que a matriz sempre é diagonal dominante estrita. Além disso, eles tendem a convergir rapidamente, em poucas iterações.

O algoritmo básico de radiosidade, então, consiste em determinar fatores de forma entre os patches e resolver a equação de radiosidade de cada patch através de um método de resolução de sistemas lineares. A seção seguinte apresenta brevemente alguns métodos comumente usados.

3.2.1 Resolvendo a Equação de Radiosidade

A equação de radiosidade para todos os patches do modelo é um sistema linear. Sistemas lineares possuem a forma $Ax = b$, onde x é o vetor solução procurado de ordem $n \times 1$, A é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ conhecida e b é um vetor também conhecido, da mesma ordem de x . Técnicas iterativas partem de uma aproximação inicial para x , e refinam essa aproximação em sucessivas iterações. A resposta do sistema é

encontrada quando a diferença entre a k -ésima aproximação e o vetor solução é menor ou igual a um ε estipulado.

3.2.1.1 Jacobi

A iteração usada pra encontrar a k -ésima aproximação da solução x para o método de Jacobi é

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n (-a_{ij} x_j^{(k+1)}) + b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

3.2.1.2 Gauss-Seidel

A iteração para a k -ésima aproximação do o método de Gauss-Seidel é dada por

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n -a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

O método de Gauss-Seidel geralmente converge mais rápido do que o método de Jacobi; segundo (COHEN; GREENBERG, 1985), entre seis e oito iterações são suficientes para a maioria dos modelos.

3.2.1.3 Southwell

Enquanto os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel resolvem o sistema avaliando as contribuições de todos os patches para um único patch, atuando como coletores de fluxo para este último e processando linha por linha do sistema, o método de Southwell faz o oposto. Ele propaga fluxo de um patch para todos os outros, processando coluna por coluna do sistema.

O método de Southwell utiliza um vetor de resíduos para a radiosidade ainda não distribuída de um patch; esse vetor é inicializado com os valores de b . Escolhe-se o patch i com o maior resíduo e atualiza-se sua aproximação:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{r_i^k}{A_{ii}} \quad (3.23)$$

Em seguida, o vetor de resíduos dos outros patches j é atualizado:

$$r_j^{k+1} = r_j^k - \frac{A_{ji}}{A_{ii}} r_i^k \quad (3.24)$$

O algoritmo de *radiosidade progressiva* utiliza uma variação desse método, que con-

segue boas aproximações com poucas iterações. Esse algoritmo oferece a vantagem computacional de menor complexidade em tempo e espaço quando comparado a outros métodos (ASHDOWN, 1994).

3.3 Breve Comparativo entre Traçado de Raios e Radiosidade

Traçado de raios e radiosidade são os principais métodos utilizados para iluminação global. Como o intuito de esclarecer as principais diferenças entre eles e justificar o uso de radiosidade, essa seção faz um breve comparativo entre os dois.

Como já foi discutido, o traçado de raios modela raios de luz. Esses raios são modelados do ponto de vista de um observador; mudar o ponto de vista ou a orientação do observador implica em aplicar o traçado de raios novamente na cena. Por isso, de maneira geral, o traçado de raios é dependente do posicionamento de um observador.

Com a radiosidade acontece o oposto. O cálculo de toda a troca de energia luminosa no modelo é baseada somente na geometria do mesmo. Esse cálculo, apesar de custoso, só precisa ser realizado uma vez; depois de concluído, é possível posicionar-se em qualquer ponto do ambiente e sintetizar uma imagem realista. Por essa razão, o método de radiosidade independe da posição ou da orientação de um observador.

Por outro lado, o traçado de raios modela reflexões especulares e a refração da luz em objetos transparentes, enquanto o método de radiosidade está limitado à modelagem puramente reflexiva, em superfícies Lambertianas.

4 *Modelo Computacional e Resultados*

Este capítulo descreve o modelo computacional construído para a aplicação do método de radiosidade. São apresentadas as estruturas de dados e os algoritmos usados para cálculo dos fatores de forma e para resolução da equação de radiosidade, além da visão geral do funcionamento da implementação. A segunda parte do capítulo exibe os resultados obtidos.

4.1 Modelo Computacional

A aplicação foi construída na linguagem C++, e também utilizou o sistema gráfico *OpenGL*. Ela é composta de quatro classes: *Vector*, *Patch*, *Model* e *Radiosity*.

A classe *Vector* representa pontos no espaço tridimensional. Suas funções são operações básicas sobre vetores: soma, subtração, produto escalar, produto vetorial e normalização.

A classe *Patch* representa a unidade básica que compõe uma superfície. Um patch tem como atributos a reflectância, três vértices de posição no espaço (cada patch é um triângulo), a área, e vetores de cor, radiosidade e emissividade, que seguem o padrão RGB usado na *OpenGL*. As operações pela classe são o cálculo do vetor normal ao patch (deve haver o cuidado de orientar as normais corretamente, caso contrário os fatores de forma serão calculados de maneira errônea) e o desenho do triângulo no monitor.

Model, como o nome indica, é um modelo de objeto tridimensional; essa classe contém uma lista de vértices e patches que formam o objeto. Entre os métodos providos, *createBox* é usado para gerar vértices e patches, construindo um modelo de sala vazia. Os outros métodos incluem a inicialização dos valores de reflectância e cor dos patches e a configuração das fontes de luz no modelo.

As funções necessárias para aplicação do método de radiosidade estão agrupadas no

módulo Radiosity.

Foi usada a Equação 3.5 para o cálculo do fator de forma entre dois patches. Inicialmente, obtem-se o vetor diferença entre os vértices de dois patches (na implementação são usados os baricentros dos triângulos). O fator r^2 é conseguido pela soma dos quadrados das coordenadas desse vetor. Os fatores $\cos \theta_i$ e $\cos \theta_j$ são conseguidos pelo produto escalar entre a normal aos patches e o vetor diferença (todos normalizados). Como as áreas dos patches são conhecidas, o fator de forma pode ser calculado.

Para a resolução do sistema, foi utilizada a radiosidade progressiva, uma relaxação do método de Southwell (GORTLER; COHEN, 1993), que funciona como segue:

```

for iteracoes = 0 to max_iteracoes do
  selecione o patch i com a maior emissividade  $E_i$ 
  for j = 0 to max_patches do
     $\Delta B = B_i * \rho_j F_{ji}$ 
     $B_j = B_j + \Delta B$ 
     $E_j = E_j + \Delta B$ 
  end for
   $E_i = 0$ 
end for

```

É comum em sistemas de radiosidade o emprego de uma função chamada radiosidade ambiente. Após o número máximo de iterações ter sido completado, ainda pode haver energia não distribuída nos patches. Na aplicação, a radiosidade ambiente soma todos os vetores de emissividade e divide cada coordenada do vetor resultante pela área total do modelo. Os vetores de radiosidades dos patches são então somados ao vetor de radiosidade ambiente.

Também foi implementado um método para amenizar a visualização da borda dos triângulos. Cada patch passou a ter um vetor de cor para cada um de seus vértices. Após a aplicação do método de radiosidade, a cor de cada vértice é dada como a média da soma das cores dos patches a que o mesmo pertence. A nova cor de cada patch é então calculada como a interpolação bilinear das cores de seus vértices.

4.2 Resultados

Essa seção mostra algumas imagens geradas com a aplicação desenvolvida. As Figuras 13 e 14 são referentes à um modelo com 1000 patches; as outras foram geradas com 5760.

Conforme esperado, as primeiras iterações da resolução do sistema distribuem a energia das fontes de luz, e por isso são responsáveis pelas maiores mudanças no aspecto do ambiente. As iterações seguintes causam alterações mais leves, refinando o resultado. Também foi observado que a aplicação de interpolação bilinear para colorização dos patches aumenta consideravelmente o tempo de renderização das imagens.

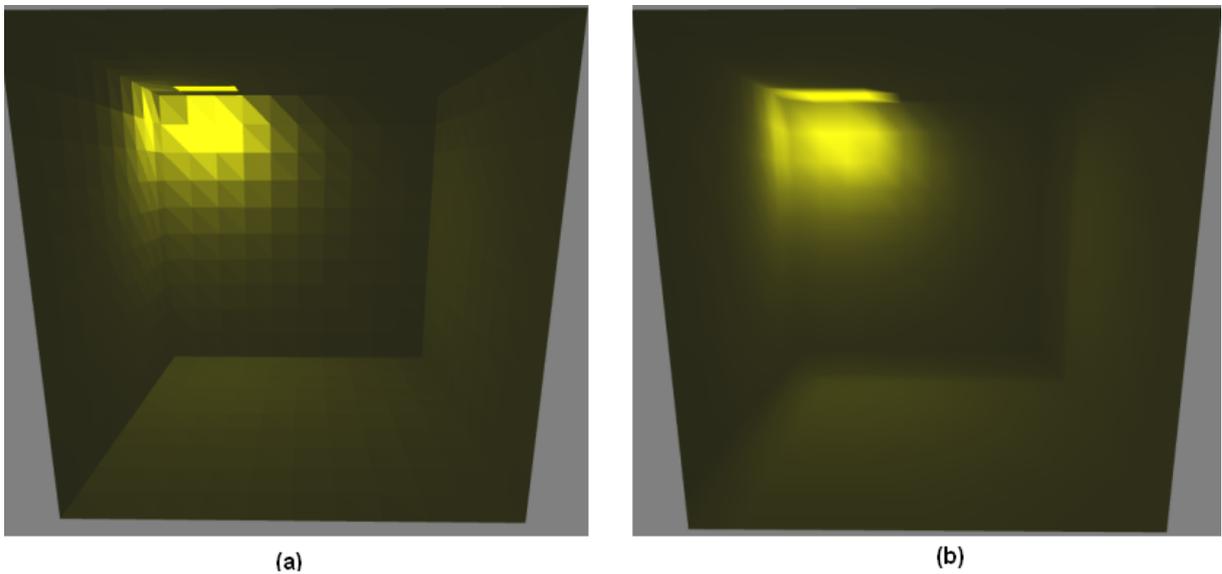


Figura 13: Cena com uma fonte de luz amarela e patches pretos, com reflectância 0,5. Em (a) a divisão entre os patches aparecem destacadas. Em (b) a subdivisões das superfícies estão suavizadas em decorrência da interpolação bilinear nos patches.

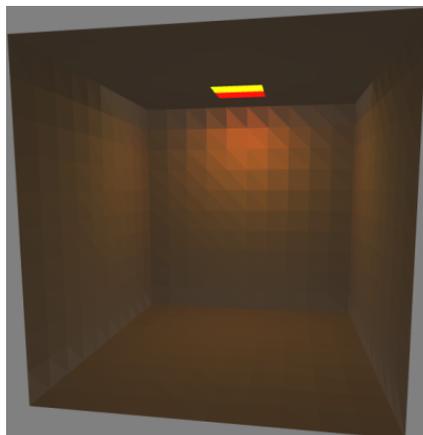


Figura 14: Patches alaranjados, consequência da iteração entre uma fonte de luz vermelha e outra amarela, exibindo efeito de interferência de cor.

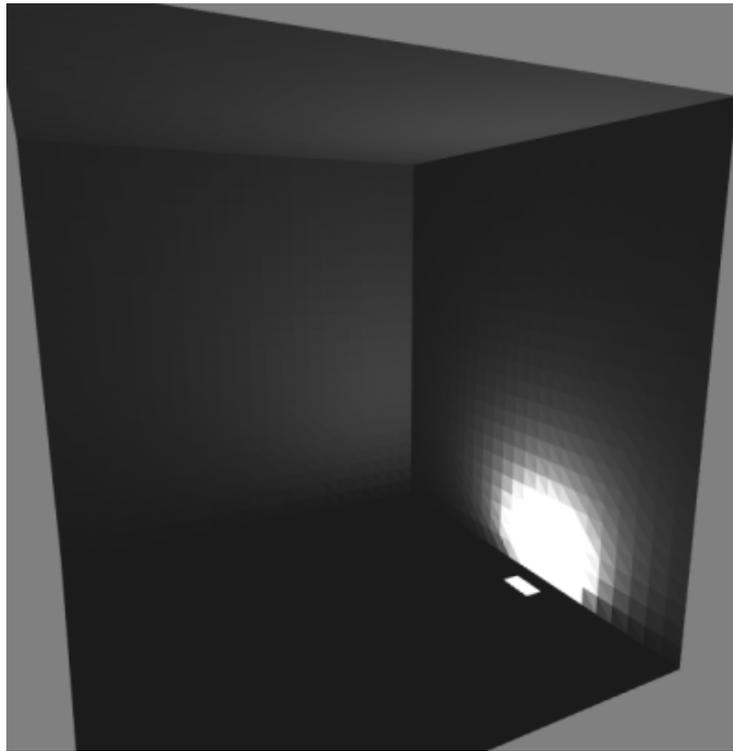


Figura 15: Cena com suaves variações de tonalidade cinza, criando efeito de sombreamento.

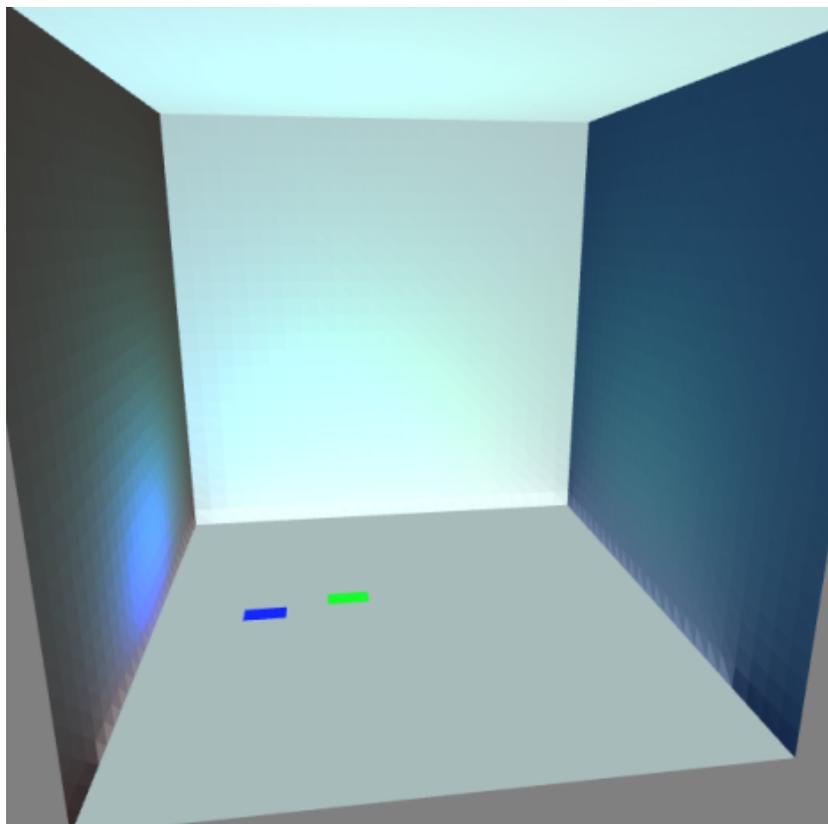


Figura 16: A coloração da parede esquerda mostra a interferência de cor entre a fonte de luz verde e a azul, que confere a cena um tom ciano.

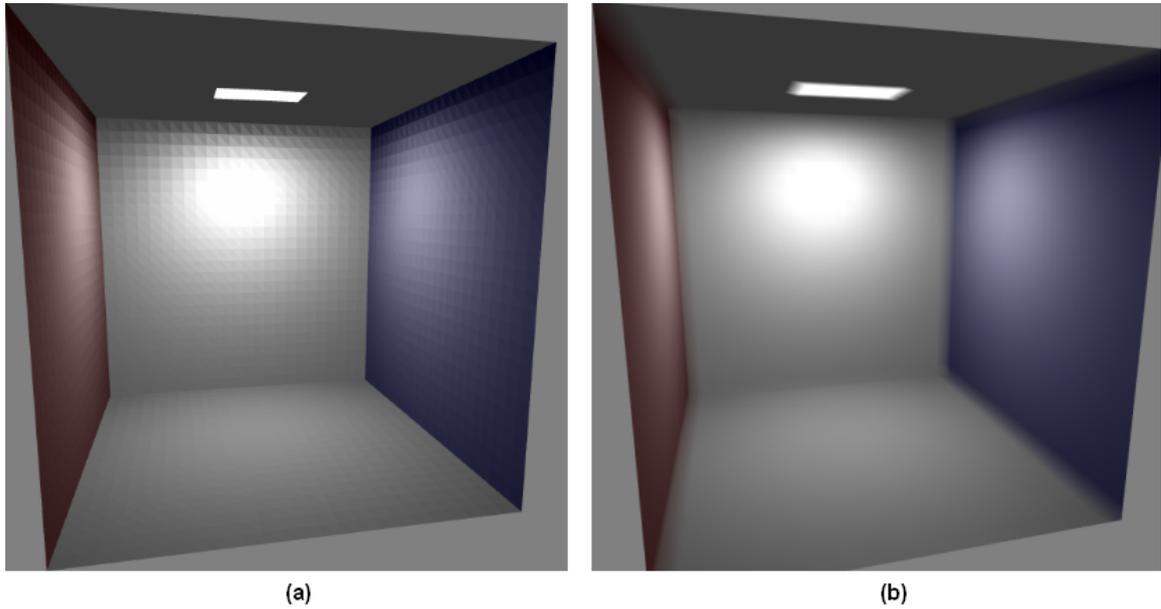


Figura 17: A fonte de luz no teto é composta por 40 quadrados(80 patches). Modelo exibe a aplicação da interpolação bilinear em modelo refinado, composto por 5760 patches.

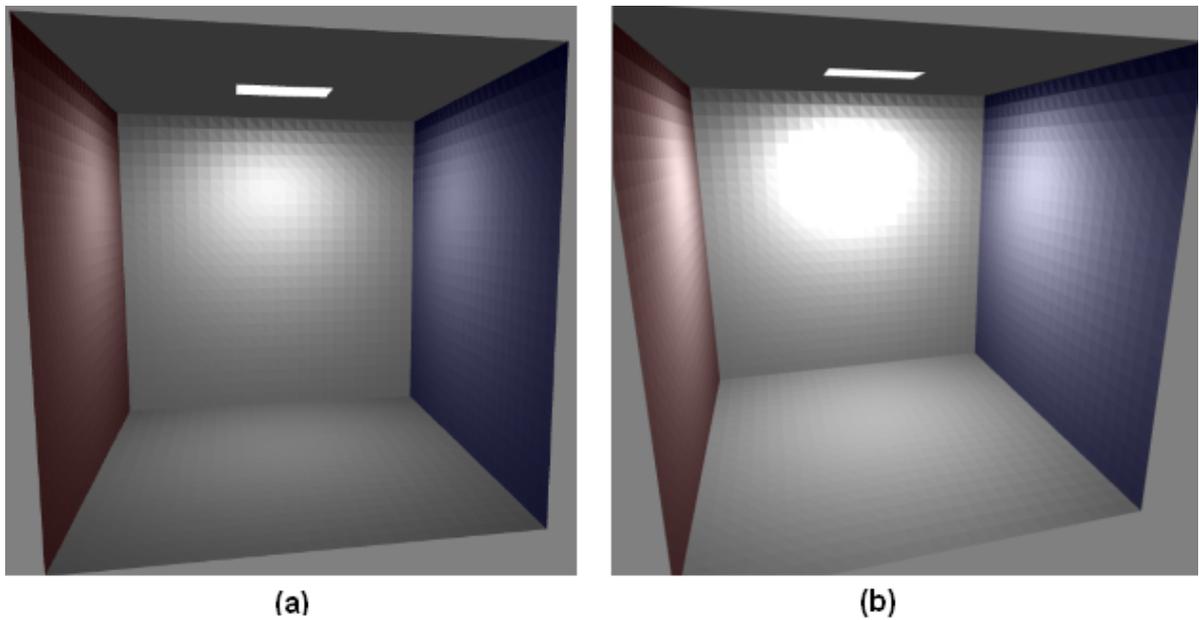


Figura 18: Cena mostra dois modelos gerados com o mesmo número de iterações. Na imagem (a), entretanto, a reflectância dos patches é de 0,3. Em (b) a reflectância é de 0,7 e a cena é de modo geral mais clara, com mais brilho nas superfícies.

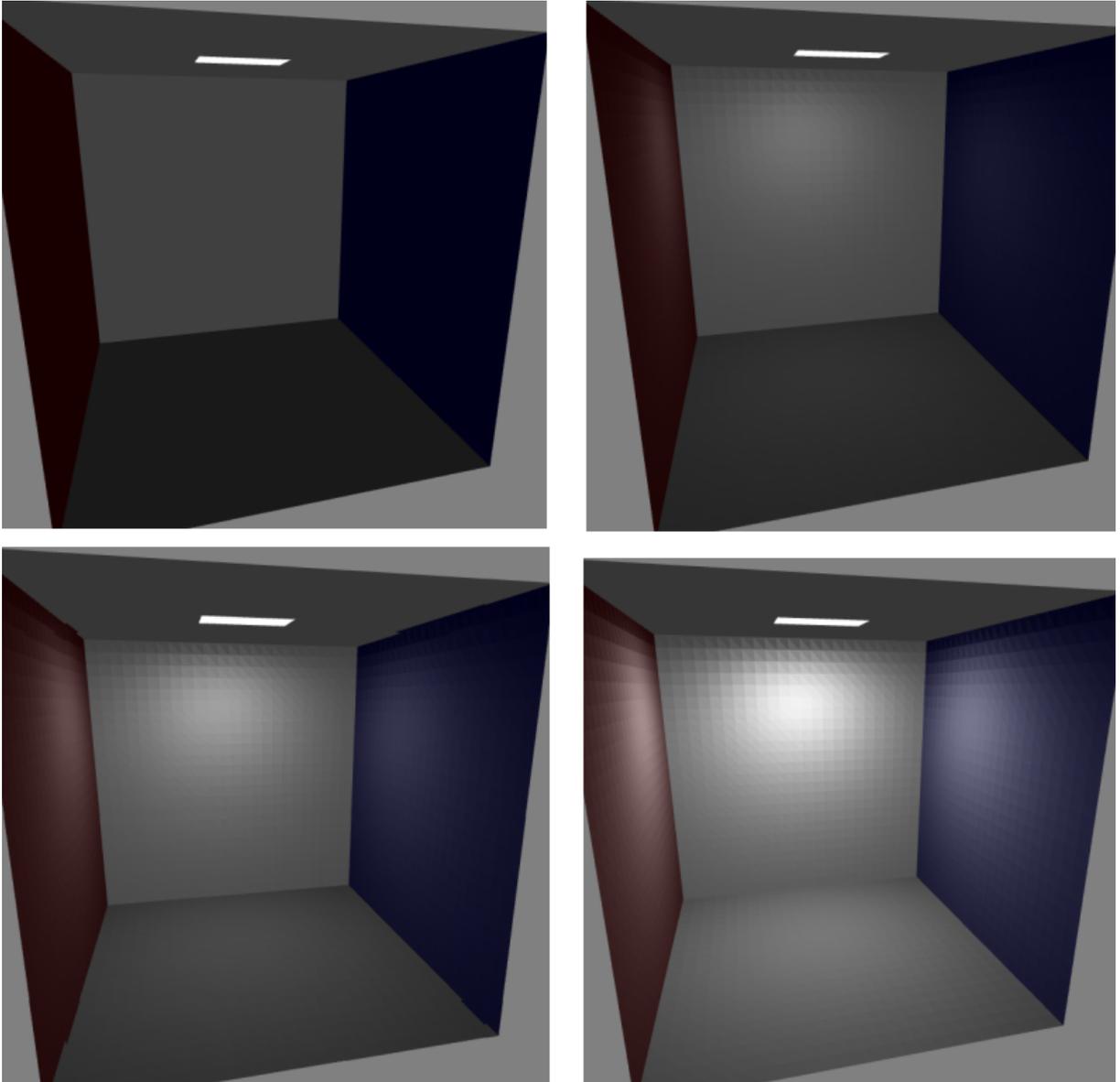


Figura 19: Evolução da distribuição de energia luminosa no ambiente. Imagens do modelo com 0, 4, 8 e 16 iterações.

5 *Conclusão*

Neste trabalho foram estudados conceitos físicos e matemáticos que descrevem a luz e o seu transporte; dentre eles, é possível destacar a equação de renderização e a BRDF, conceitos chave utilizados para retratar a conservação de energia e a reflexão da luz em algoritmos que buscam simular a iluminação de uma cena de maneira realista, através de leis físicas.

Foi apresentado o método de radiosidade como forma de resolver o problema da troca de energia luminosa entre superfícies. Foram discutidos os fundamentos do método, diferentes modos de calcular fatores de forma, a maneira como a equação de renderização é simplificada para se ajustar à radiosidade e os métodos numéricos mais utilizados para solucionar o sistema linear resultante dessa simplificação. Também foi abordada a limitação do método, modelagem exclusivamente reflexiva em superfícies Lambertianas.

A aplicação desenvolvida simplifica o avaliação dos fatores de forma e utiliza o método de Southwell. Os resultados obtidos mostraram que são necessários muitos patches para obtenção de imagens com boa qualidade. Os modelos usados na implementação são simples, porém suficientes para observar efeitos de interferência de cor e inter-reflexão da luz; modelos mais complexos, entretanto, requerem mais iterações e cálculos de visibilidade, o que obviamente significa demora na renderização. Dessa forma, o uso de algoritmos de iluminação global em tempo real ainda é um desafio, apesar dos novos avanços em progresso.

Como trabalho futuro, pode-se estender a aplicação desenvolvida para tratar da oclusão de patches. Além disso, pode-se alterar a implementação para utilizar o hemicubo, que é bastante usado em diversas aplicações comerciais e mais adequado para o cálculo dos fatores de forma em ambientes complexos.

Referências

- ASHDOWN, I. *Radiosity: A Programmer's Perspective*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994. 497 p.
- BLINN, J. F. Models of light reflection for computer synthesized pictures. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 11, n. 2, p. 192–198, 1977. ISSN 0097-8930.
- COHEN, M.; MANSSOUR, I. *OpenGL - Uma Abordagem Prática e Objetiva*. São Paulo: Editora Novatec, 2006. 486 p.
- COHEN, M. F.; GREENBERG, D. P. The hemi-cube: a radiosity solution for complex environments. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 19, n. 3, p. 31–40, 1985. ISSN 0097-8930.
- COHEN, M. F.; WALLACE, J.; HANRAHAN, P. *Radiosity and Realistic Image Synthesis*. San Diego, CA, USA: Academic Press Professional, Inc., 1993. ISBN 0-12-178270-0.
- ELIAS, H. *Radiosity*. 2000. Disponível na Internet.
<<http://freespace.virgin.net/hugo.elias/radiosity/radiosity.htm>>.
- GORAL, C. M. et al. Modeling the interaction of light between diffuse surfaces. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, ACM, New York, NY, USA, v. 18, n. 3, p. 213–222, 1984. ISSN 0097-8930.
- GORTLER, S.; COHEN, M. F. *Radiosity and Relaxation Methods: Progressive Refinement is Southwell Relaxation*. [S.l.], 1993.
- JENSEN, H. W. *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping*. Natick: AK Peters, 2001. 200 p.
- JOHN, M. *Focus on Photon Mapping*. Cincinnati: Premier Press, 2003. 330 p.
- LAFORTUNE, E. P.; WILLEMS, Y. D. *Using the Modified Phong Reflectance Model for Physically Based Rendering*. [S.l.], 1994.
- SCHLICK, C. An inexpensive brdf model for physically-based rendering. *Computer Graphics Forum*, v. 13, p. 233–246, 1994.
- WYNN, C. An introduction do brdf-based lighting. Nvidia Corporation, 2000. Disponível em: <http://developer.nvidia.com/object/BRDFbased_Lighting.html>.