Tiago de Souza Mota

Métodos de Reconstrução de Superfície

Orientador: Marcelo Bernardes Vieira

Universidade Federal de Juiz de Fora Instituto de Ciências Exatas Departamento de Ciência da Computação

Juiz de Fora

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação

> Prof. Marcelo Bernardes Vieira, D. Sc. Orientador

Prof. Ilaim costa Junior, D. Sc.

Prof. Wilhelm Passarella Freire, D. Sc.

$Sum{{\acute{a}}rio}$

Resumo

1	Intr	roduçã	0	p.7
	1.1	Defini	ção do Problema	p.7
	1.2	Objet	ivos	p.8
2	Mo	delo M	Iatemático	p. 10
	2.1	Conce	eitos Gerais	p. 10
		2.1.1	Variedades	p. 10
		2.1.2	Espaço topológico	p. 11
			2.1.2.1 Propriedades do espaço topológico	p. 11
			2.1.2.2 Vizinhança	p. 12
		2.1.3	Superfícies	p. 12
	2.2	Objet	os geométricos	p. 12
		2.2.1	Representações de Objetos Geométricos	p. 13
	2.3	Aprox	timação de superfícies	p. 15
		2.3.1	Conceitos estatísticos	p. 15
			2.3.1.1 Ruído e densidade de amostras	p. 16
		2.3.2	Complexos simpliciais	p. 16
		2.3.3	Outras aproximações	p. 17
	2.4	Conce	itos de reconstrução de superfícies	p. 18
		2.4.1	Função de distância com sinal	p. 19

		2.4.2	Obtenção	o de normais	p. 19
		2.4.3	Discretiz	ação do Domínio	p. 20
3	Mét	odos d	le recons	trução de Superfícies	p. 22
	3.1	Recons	strução à	partir de pontos desorganizados (HOPPE, 1992)	p. 22
		3.1.1	Etapa 1:	Cálculo da distância geométrica com sinal	p. 23
			3.1.1.1	Estimação dos planos tangentes	p. 23
			3.1.1.2	Orientação dos planos tangentes	p. 24
			3.1.1.3	Cálculo da função de distância com sinal	p. 25
		3.1.2	Etapa 2:	Extração de contorno	p. 25
	3.2	Recons	strução a j	partir de Bases de Funções Radiais (CARR R. K. BEATSON,	
		2001)			p. 26
		3.2.1	Etapa 1:	Construção da função de distância com sinal	p. 26
		3.2.2	Etapa 2:	Associação dos valores de f com uma RBF $\ .$	p. 27
		3.2.3	Etapa 3:	Visualização da iso superfície definida pela RBF $\ .\ .\ .$	p. 27
	3.3	Recons	strução a j	partir de problemas de Poisson (KAZHDAN MATTHEW BO-	
		LITHO	, 2006) .		p. 28
4	Apl	icações	s e Resul	tados	p. 30
	4.1	Impler	nentação	de um modelo reconstrutor	p. 30
		4.1.1	Etapa 1:	Cálculo da distância geométrica com sinal (Sec. $3.1.1$)	p. 30
			4.1.1.1	Estimação dos planos tangentes (Sec. 3.1.1.1) $\ . \ . \ .$	p. 30
			4.1.1.2	Orientação dos planos tangentes (Sec. 3.1.1.2)	p. 32
			4.1.1.3	Cálculo da função de distância com sinal (Sec. 3.1.1.3)	p. 34
		4.1.2	Etapa 2:	Extração de contorno (Sec. 3.1.2)	p. 34
	4.2	Breve	comparat	ivo entre métodos	p. 38

5 Conclusão

Referências

p. 40

Resumo

Este trabalho faz um estudo sobre alguns métodos de reconstrução de superfície, explorando os conceitos envolvidos para o entendimento de todas as técnicas utilizadas nos mesmos. Os métodos, aqui estudados, são muitas vezes classificados como métodos de reconstrução de superfícies através de nuvens de pontos.

Para um maior entendimento do problema de se reconstruir superfícies, um dos métodos estudados foi escolhido para ser implementado, demonstrando-se na prática algumas idéias e dificuldades encontradas nessa sub-área de conhecimento.

1 Introdução

A necessidade de uma representação computacional cada vez mais fiel dos objetos do mundo real é inerente ao avanço das tecnologias computacionais na sociedade atual. Em especial, na computação gráfica, o objetivo é conseguir uma visualização que represente bem os modelos reais.

Para que um objeto real seja representado graficamente, o ponto de partida seria a aquisição de dados do mesmo. A depender do resultado gráfico esperado, esses dados podem passar por uma serie de processamentos até que se obtenha um modelo a ser exibido. Muitas vezes, técnicas de modelagem geométrica não são suficientes para se gerar o modelo geométrico esperado. Isso, pois podem esbarrar em uma série de empecilhos como: o alto tempo gasto em todo processo, a incoerência dos dados adquiridos, as inexatidões geradas por etapas manuais, etc.

O surgimento e o avanço tecnológico dos dispositivos ópticos de obtenção de dados geométricos permitem uma amostragem de dados cada vez melhor de objetos reais. Porém, introduz-se um novo problema: como extrair das amostras boas representações de superfícies? A resposta a essa pergunta é a aplicação de técnicas de uma nova e crescente área de estudos dentro da computação gráfica: A reconstrução de superfícies.

1.1 Definição do Problema

O objetivo da *reconstrução de superfícies* é encontrar uma superfície a partir de um conjunto de valores de amostras geométricas (MULLER, 1992). Assim temos a disposição, no espaço euclidiano, das formas escondidas nos dados amostrados, de forma que a percepção do objeto representado seja mais intuitiva do que a simples disposição desses dados de entrada. Para que isso aconteça, é fundamental que as amostras representem bem a superfície em questão.

A representação exata da superfície nem sempre é possível, o que se faz exigir uma

aproximação da mesma. Essa aproximação deve manter não só as informações geométricas do objeto real, mas também deve manter as suas informações topológicas.

Muitos métodos de reconstrução de superfícies foram criados desde que o tema ganhou notoriedade, porém todos eles passam por algumas etapas básicas, que sendo executadas ordenadamente é comum serem chamadas de *roteiro de reconstrução*.



Modelo Real

Modelo Reconstruído

Figura 1: roteiro de reconstrução. Modelo reconstruído através de problemas de POIS-SON.

Os dados amostrados dependem sempre dos dispositivos de aquisição utilizados, assim como o resultado gráfico obtido depende sempre da escolha de técnicas de reconstrução aplicadas. O desafio é ser capaz de reconstruir superfícies a partir de qualquer dispositivo de aquisição ou a partir de qualquer conjunto de entrada de dados.

As aplicações dessa área de conhecimento são inúmeras, podendo ser usadas diretamente em diversas áreas da sociedade como na medicina, nas artes, na física, na arquitetura, etc. Os resultados gerados podem ser empregados tanto na visualização e criação de estruturas diversas, assim como na simulação de fenômenos físico/químicos dos mais variados.

1.2 Objetivos

O objetivo primário dessa monografia é explorar as principais técnicas de reconstrução de curvas e superfícies, formalizando as etapas necessárias para a criação de um modelo abstrato de reconstrução. Para isso, serão abordados conceitos de sub-áreas de conhecimento como: geometria computacional, teoria dos grafos, álgebra linear e cálculo.

O objetivo secundário é a implementação de técnicas para os métodos de reconstrução mais importantes.

Um outro objetivo objetivo secundário é a aplicação das técnicas implementadas em modelos reais.

2 Modelo Matemático

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos matemáticos mais utilizados no processo de reconstrução de superfície. As definições a seguir se fazem necessárias para a compreensão do sugerido modelo abstrato de um reconstrutor de superfícies.

2.1 Conceitos Gerais

O problema de reconstrução de superfícies, antes de tudo, é um problema matemático. Assim, o conhecimento de algumas definições matemáticas são necessárias para uma maior compreensão dos conceitos utilizados neste trabalho.

2.1.1 Variedades

Uma variedade (ou manifold) é uma abstração matemática que define um espaço que pode ser modelado em um domínio euclidiano. Em outras palavras, é um espaço que é localmente similar a \mathbb{R}^n , porém sem um sistema fixo de coordenadas. Essa característica e o fato de possuir propriedades topológicas globais que o permite representar os elementos mais complexos fazem o conceito de variedade diferir do conceito \mathbb{R}^n trivial.

Este trabalho está interessado em variedades de dimensão fixa, que formam um espaço chamado de n - *variedade*. A idéia de dimensão em uma variedade possibilita a generalização de alguns conceitos geométricos de acordo com sua valoração, como por exemplo:

- Curvas: variedades de dimensão 1.
- Superfícies: variedades de dimensão 2.
- Volumes: variedades de dimensão 3.

Assim, o conjunto de pontos n-dimensionais aqui estudado é localmente homeomorfo a uma bola aberta no \mathbb{R}^n , ou seja, possuem a mesma topologia (Sec.2.1.2).



Figura 2: Homeomorfismo em \mathbb{R}^2 (VELHO, 2001)

2.1.2 Espaço topológico

Um espaço topológico pode ser definido como um conjunto X, que junto com uma coleção T de subconjuntos satisfaz a três axiomas básicos listados abaixo (SCHENCK,2003):

- 1. O conjunto vazio está contido em T.
- 2. A união de qualquer coleção de conjuntos contidos em T, também está contida em T.
- 3. A *intersecção* de qualquer coleção finita de conjuntos contidos em T, também está contida em T.

A coleção T é chamada de topologia em X e seus elementos são chamados de *abertos*.

2.1.2.1 Propriedades do espaço topológico

O entendimento de algumas propriedades características de espaços topológicos será necessário para a definição de conceitos geométricos que serão vistos a seguir.

Nesse espaço serão citados as seguintes propriedades :

- *conexidade*: um espaço topológico é dito *conexo* quando não pode ser representado como uma união disjunta de dois ou mais espaços abertos não vazios;
- compacidade: um espaço topológico X é dito compacto se todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação. Seja S um subconjunto do espaço topológico X. Um ponto x em X é um ponto de acumulação de S se todo conjunto aberto contendo x também contém ou outro ponto de S diferente de x. Isso é equivalente a pedir que todo vizinho de x contenha pontos de S diferentes de x.

• *orientabilidade*: um espaço topológico é dito *orientável* se um disco nele desenhado com uma certa orientação (sentido horário ou anti-horário), retorna a posição original com a mesma orientação sempre que movido sob esse espaço.

Em outras palavras, um espaço topológico é dito orientável se dois pontos, envolvidos em uma pequena variação espacial sob esse espaço, não apresentarem uma grande alteração no valor do vetor normal entre esses pontos.

2.1.2.2 Vizinhança

Para se definir *vizinhança* de um elemento é necessário o conhecimento de que um conjunto interior de um conjunto A é a união de todos os conjuntos abertos contidos em A.

Assim, em um espaço topológico T, a vizinhança de um elemento $x \in X$ é qualquer conjunto $A \subseteq X$ no qual $x \in$ interior de A (ZOMORODIAN, 2005). O conceito de vizinhança é muito importante em reconstrução de superfícies, uma vez que em uma grande quantidade de casos, pode-se não ter informações locais referentes a uma componente do elemento x e para consegui-las é necessária uma análise da vizinhança do mesmo em relação à essa componente.

2.1.3 Superfícies

O termo superfície neste trabalho será definido como um 2-manifold compacto, conexo e orientável mergulhado no \mathbb{R}^3 , possivelmente com bordo (O'NEILL., 1966).

Define-se como *isosuperfície* a superfície que representa pontos de valor constante dentro de um volume no espaço. Em outras palavras, é o nível de uma função contínua cujo domínio é o espaço 3d.

2.2 Objetos geométricos

Segundo (ATENCIO, 2005) um *objeto geométrico* é um conjunto fechado de pontos, que é limitado e não vazio. Podem ser de dois tipos: côncavos e convexos.

Um objeto geométrico é convexo se qualquer segmento de reta ligando pontos do objeto pertence ao mesmo. É côncavo caso contrário.

Da definição de convexidade, pode-se estender a definição de fecho convexo, que é o



Figura 3: convexidade de objetos

menor conjunto convexo de um conjunto de pontos X em \mathbb{R}^n contendo o próprio conjunto X.



Figura 4: fecho convexo

2.2.1 Representações de Objetos Geométricos

Para se modelar objetos geométricos é necessário criar descrições geométricas que os representem. Existem dois tipos de representações válidas para tais objetos (VELHO, 2001):

- Paramétricas: Nela, o conjunto de pontos p ∈ S, é definido diretamente através de uma função p = f(u) definida em um espaço de parâmetros com a dimensão m do objeto, i.e. u ∈ ⊂ ℝ^m.
- Implícitas: Nela, a geometria é definida implicitamente como o conjunto dos pontos p ∈ ℝ³ que satisfazem a equação g(p) = c. Assim, dizemos que S = g⁻¹(c) é a imagem inversa de g.



Figura 5: representação de objetos (VELHO, 2001)

É importante perceber que as representações implícitas permitem classificar os pontos do espaço em questão em relação a um conjunto de nível n. Essa característica permite uma outra forma de definir um objeto a partir de sua representação implícita. Assim, um subconjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *objeto implícito* se existe $F: U \to \mathbb{R}^n$, $O \subset U$, e existe um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $O = F^{-1}(V)$ ou $O = p \in U, F(p) \in V$ (CAVALCANTI, 2000).



Figura 6: objeto implícito (CAVALCANTI, 2000)

Um objeto implícito é válido se ele define uma superfície no \mathbb{R}^n Seja p = (x, y, z). Então, quando:

- $F(p) \ge 0 \Rightarrow p \in \text{exterior de O};$
- $F(p) = 0 \Rightarrow p \in$ fronteira de O;
- $F(p) \le 0 \Rightarrow p \in \text{interior de O}.$

Assim pelo valor da função F, se é capaz de afirmar sobre a localização dos pontos, ou seja, se ele é ponto interior, ponto de fronteira ou ponto exterior do objeto.

2.3 Aproximação de superfícies

Apesar das funções matemáticas poderem definir com exatidão os modelos de superfícies, nem sempre se está interessado na representação exata do conjunto que as define. A representação computacional de superfícies, por exemplo, esbarra na impossibilidade de se manipular um conjunto infinito de pontos. Por esse motivo, para se representar superfícies usam-se aproximações da mesma, e para isso os conceitos abaixo são muito importantes.

2.3.1 Conceitos estatísticos

A obtenção do conjunto que define uma superfície é determinante para o processo de reconstrução, sendo que para se dispor de um bom conjunto representativo algumas noções estatísticas são fundamentais.

Amostras são subconjuntos selecionados de uma coleção finita ou infinita qualquer de unidades população escolhidas por algum processo. Esta coleção é definida de acordo com o estudo em que está sendo utilizada e seus elementos devem possuir pelo menos uma característica comum entre eles. Neste trabalho ela será definida como um conjunto de todos os pontos pertencentes à superfície que se deseja reconstruir.

As amostras devem ser obtidas através de técnicas de amostragem eficientes, pois dessa forma conseguem garantir uma boa representatividade da conjunto que as pertence.

A disposição das amostras dentro do conjunto estudado pode definir não só qual será o método a ser escolhido para a reconstrução, mas também quais as técnicas de reconstrução nesse método que se devem ser usadas para se obter a superfície definida por estas amostras.

Dentro deste contexto define-se como *espaço amostral* o conjunto contento todos os resultados possíveis de um evento probabilístico. Podem ser classificados como:

- Uniformes: É o espaço amostral no qual todos os eventos têm a mesma chances de ocorrer.
- *Não Uniformes*: É o espaço amostral no qual as chances de se ocorrerem um evento variam de evento para evento.

2.3.1.1 Ruído e densidade de amostras

Em reconstrução de superfícies, para se capturar erros no processo de amostragem, pode se assumir que cada ponto $x_i \in X$ (onde X é o espaço amostral) assume a forma x_i $= y_i + e_i$, onde y_i é um ponto na superfície até então desconhecida e $e_i \in \mathbb{R}^3$ é um vetor de erro. Chama-se de δ -ruidoso o espaço amostral X se $e_i \leq \delta$ para todo *i*, onde e_i é a distância euclidiana do vetor *e* (HOPPE, 1992).

Uma reconstrução que se utilizou de um número pequeno (ou insuficiente) de amostras pode se tornar muito difícil, por isso o conceito de *densidade de amostras* se torna importante neste contexto.

Seja Y, o conjunto de pontos amostrados sem ruídos de uma superfície. Diz-se que Y é ρ -denso se qualquer esfera de raio ρ contém pelo menos um ponto em Y.

2.3.2 Complexos simpliciais

Como toda primitiva geométrica é um conjunto de pontos, pode-se expandir esse conceito para o \mathbb{R}^3 , dizendo que um objeto geométrico é um conjunto coleção de primitivas geométricas que tem o bordo como parte do objeto e no qual existe uma esfera de raio finito que limita o mesmo.

Um *j-simplexo* é o fecho convexo de qualquer conjunto de j+1 pontos no \mathbb{R}^n . Em outras palavras, *j*-simplexos podem ser definidos como análogos dimensionais de triângulos, onde *j* representa a dimensão do simplexo. Para exemplificar, segue-se:

- Um 0-simplexo é um ponto;
- Um 1-simplexo é segmento de reta;
- Um 2-simplexo é um triângulo.
- Um 3-simplexo é um tetraedro.

Um complexo simplicial T é uma família não vazia de simplexos em \mathbb{R}^n sendo que:

- 1. $\sigma \in T$ implica que $t \in T$ para toda face t de σ .
- 2. Se $\sigma, t \in T$ e $\sigma \cap t \neq 0$ então σ, t é face de σ e também de t.



Figura 7: k-simplexos para cada $0 \le j \le 3$ (ZOMORODIAN, 2005)

Uma aproximação bastante usada de superfícies se dá através de conjuntos unidos de complexos simpliciais, chamados de *superfícies simpliciais*. Neste trabalho *superfície simplicial* é definida como sendo uma superfície formada com faces triangulares (HOPPE, 1992). Em outras palavras é uma superfície formada por 2-simplexos unidos, que neste caso representam uma aproximação combinatória de uma superfície X em \mathbb{R}^n .

Esta aproximação se torna válida uma vez que de um ponto de vista topológico não existe diferença entre uma 2-esfera S^2 e o bordo de um tetraedro (SCHENCK, 2003).



Figura 8: topologia da esfera e do tetraedro (SCHENCK, 2003)

2.3.3 Outras aproximações

Qualquer conjunto que consiga representar de forma válida os elementos da superfície pode vir a ser uma aproximação da mesma. A partir da obtenção dos pontos amostrados (pertencentes à superfície) podemos gerar uma série de aproximações, cuja utilização ou não vai depender do contexto em que serão aplicadas.

A primeira forma de aproximação seria a aproximação por *nuvens de pontos*, que usa os pontos amostrados como elementos primitivos básicos de representação. Alguns pontos podem ser adicionados ao conjunto inicial no intuito de aumentar o conjunto

representativo, porém essa forma de aproximação pode não ser interessante, já que forma um conjunto altamente descontínuo.

Uma outra forma de aproximação possível é através de *planos tangentes*. Nesse caso, o conjunto de representação é formado por planos tangentes (de tamanho limitado) aos pontos que fazem parte da superfície. Essa aproximação também pode não ser interessante uma vez que, por se tratar de uma união de conjuntos bidimensionais, introduzem transições não suaves, além de possíveis descontinuidades.



Figura 9: aproximações de superfícies: a)por nuvem de pontos e b)por planos tangentes (HOPPE, 1992)

A forma de aproximação mais utilizada em computação gráfica e a que será utilizada neste trabalho será a aproximação por *superfícies simpliciais*, pois permitem a criação e representação dos objetos mais complexos. Alem disso, amenizam o problema da descontinuidade em outras aproximações e permitem representar objetos de forma simples.

2.4 Conceitos de reconstrução de superfícies

Uma característica importante em se tratando de reconstrução de superfícies é a grande quantidade de técnicas e métodos de reconstrução aliados a uma infinidade de naturezas dos dados amostrados. Mesmo com esse vasto número de métodos, pode-se perceber dentro do contexto deste trabalho, uma série de conceitos fundamentais em comum a todos os métodos de reconstrução de superfícies em questão.

2.4.1 Função de distância com sinal

A função de distancia com sinal f(p) de um ponto p qualquer $\subset \mathbb{R}^3$ até uma superfície U é a distancia entre o ponto p e o ponto mais próximo de $p \in U$, multiplicado por +1 ou por -1, a depender de qual lado (de dentro ou de fora) da superfície o ponto p está (HOPPE, 1992). Isso significa que o módulo dessa função de distância diminui quando deslocamos um ponto em direção à superfície U.

A representação implícita define a superfície como sendo o núcleo da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ou seja, como o conjunto de pontos (x, y, z) os quais tem f(x, y, z)=0. Apesar de existirem muitos tipos de função para representar a superfície U em questão, a forma mais usada é a função de distancia com sinal, que associa cada ponto no espaço euclideano a sua distancia da superfície.

Desta forma, quando o valor da função f(p) é igual a zero, pode-se afirmar que o ponto *p* faz parte da superfície *U*. Por isso, um dos objetivos da reconstrução de superfícies é encontrar um conjunto cujos elementos pertencentes a ele possuem os valores das funções de distância com sinal iguais a zero, ou seja, achar o *conjunto zero* dentre os elementos pertencentes ao espaço euclideano em que se encontra a superfície.

2.4.2 Obtenção de normais

Uma propriedade geométrica quase sempre indispensável em reconstrução de superfícies é o vetor normal dos pontos que definem a superfície. Isso pois, esse vetor é fundamental na classificação de um ponto x qualquer quanto à sua localização em relação a superfície S que se está sendo estudada. Além disso, a análise do campo formado pelos vetores normais dos pontos da superfície nos permite afirmar sobre uma série de características relativas à essa superfície, como por exemplo sobre sua orientabilidade ou sua convexidade.

Algumas vezes esse vetor já é coletado no processo de amostragem, no entanto nem sempre se tem a informação de quais são os vetores que definem as normais nos pontos em questão. Quando isso acontece, é necessário obter essas informações através de métodos de *estimação de normais*.

Muitos pesquisadores já tentaram estimar os vetores normais de pontos discretos através de superfícies paramétricas lisas, ou através de modelos de geração poligonal superfície. Em todos os casos, a estimativa passaria, no mínimo, pelas três etapas principais descritas abaixo (OUYANG, 2004):

- 1. Identificar os pontos vizinhos locais adequados para estimação do vetor normal;
- 2. Estimar o vetor normal baseado nos vizinhos locais;
- 3. Estabelecer as direções interna e externa do vetor normal.

2.4.3 Discretização do Domínio

No processo de visualização de superfícies e volumes, se está interessado na representação apenas do espaço que suporta o objeto em questão, uma vez que todas os dados envolvidos estarão nesse espaço e todas as operações utilizarão este suporte como base. Porém é impraticável representar todo o intervalo gerado por esse espaço, sendo necessária a criação de um *suporte tridimensional discreto* que represente bem o espaço em questão.

Uma abordagem interessante é representar os dados desse espaço por paralelepípedos, fortemente agrupados, formados pela divisão do espaço do objeto através de um conjunto de planos paralelos aos eixos principais desse espaço (SEIXAS, 1999). Essas estruturas recebem o nome de *voxels*.

Assim, se cria uma grade contendo essas estruturas e utiliza-se a mesma para representarse os dados em cada ponto desse domínio discretizado. Geralmente na reconstrução de superfícies esse processo é realizado logo antes de se extrair a superfície.



Figura 10: valores associados aos voxels (SEIXAS, 1999)

A depender da utilização essa grade pode ser regular ou não, ou seja, podem ou não ser dispostos em intervalos regulares. A idéia é utilizar-se dos vértices da grade para calcular valores relativos a esse ponto (como o valor da função implícita por exemplo) e utilizar interpolações para calcular valores relativos a pontos que não estejam nos vértices dos voxels.

3 Métodos de reconstrução de Superfícies

Existem várias classificações para os métodos de reconstrução de superfície, sendo que elas são definidas principalmente pela natureza das amostras e das funções que definem a superfície.

Este trabalho optou por estudar métodos de reconstrução que têm por característica principal possuir como conjunto de amostras um número finito de pontos pertencentes a superfície. Essa abordagem recebe o nome de *reconstrução por nuvem de pontos*

Durante o desenvolvimento deste trabalho alguns métodos de reconstrução de superfícies foram estudados com mais cuidado, por se tratarem de métodos-chave na reconstrução utilizando essa abordagem.

Todos os métodos aqui descritos tem por objetivo a obtenção de uma superfície simplicial que aproxima uma superfície qualquer X, à partir de um conjunto de amostras.

3.1 Reconstrução à partir de pontos desorganizados (HOPPE, 1992)

Este método foi apresentado em 1992 e se tornou referência pois trouxe com ele uma série de inovações no tratamento dos dados amostrados. Alguns conceitos até então novos na sub-área de reconstrução de superfícies se tornaram sólidos a partir da publicação deste método.

Ele pode ser dividido em duas etapas, sendo a primeira a definição de uma função f: $D \to \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}^3$ é a região perto dos pontos amostrados sendo que f estima a distância geométrica com sinal para uma superfície desconhecida S. O conjunto zero Z(f)é a estimativa para S.

A segunda etapa é usar um algoritmo de contorno para aproximar Z(f) através de

uma superfície simplicial.

O segredo para se calcular a distância com sinal é associar cada ponto amostrado com um plano tangente orientado. Esses planos tangentes servirão como aproximações lineares locais da superfície.

3.1.1 Etapa 1: Cálculo da distância geométrica com sinal

Essa etapa é bastante custosa, uma vez que são necessárias uma série de sub etapas com alta complexidade de tempo. Esses passos podem ser definidos, em ordem de execução, como: estimação dos planos tangentes, orientação dos planos tangentes e por fim o cálculo da função de distância com sinal.

3.1.1.1 Estimação dos planos tangentes

Nessa etapa se define um plano tangente para cada ponto amostrado. Esse plano tangente é representado pelo seu centro (*ponto centróide*) e por seu vetor normal. O ponto centróide o_i de um ponto amostrado x_i pode ser considerado como uma aproximação da superfície S associada ao ponto x_i . Ele pode ser obtido pela média de um número determinado de vizinhos, ou seja, os k-vizinhos $Kviz(x_i)$ do ponto x_i (Sec. 2.1.2.2).

Para se obter o vetor normal \hat{n} associado aos planos tangentes é necessário fazer uma estimação de normais (Sec. 2.4.2). É proposto um método de estimação de normais a partir da criação de uma matriz de covariância cujos elementos são resultantes de um somatório de produtos vetoriais. Esses produtos vetoriais têm como elementos envolvidos as distâncias do ponto centróide de todo x_i até seus vizinhos. Ou seja, a matriz de covariância CV pode ser definida como:

$$CV = \sum_{y \in Kviz(x_i)} (y - o_i) \otimes (y - o_i)$$
(3.1)

Desta matriz de covariância são extraídos seus autovetores e autovalores. É escolhida como sendo a estimação da normal o autovetor de menor autovalor, multiplicado por 1 ou -1. Isso pois, como foi dito em (Sec. 2.4.2), cada ponto possui dois vetores normais associados e o processo de estimação não é capaz de diferenciar um do outro, podendo gerar qualquer um dos dois.

3.1.1.2 Orientação dos planos tangentes

Com os vetores normais estimados, vem a etapa mais trabalhosa do cálculo da distância geométrica com sinal, que é orientar todas as normais definidas pelos planos tangentes calculados (Sec. 2.4.2). Isso para posteriormente se poder classificar os pontos de acordo com a função implícita definida nos pontos centróides.

Para essa tarefa, usa-se uma abordagem por grafos, sendo necessária a construção de 3 desses objetos.

O primeiro deles é a chamada *árvore geradora mínima euclideana*, que tem por objetivo gerar o caminho de menor custo de um grafo que considera cada ponto centróide como um vértice do grafo e assume como arestas do mesmo os caminhos que ligam cada ponto centróide a todos os outros. Os pesos dessas arestas são as distâncias euclideanas entre os pontos centróides envolvidos nas ligações.

O segundo grafo é obtido com a adição de uma série de arestas à arvore geradora mínima euclideana. Essas arestas adicionadas serão definidas pelas ligações de cada ponto centróide envolvido com seus k-vizinhos. Chama-se de *Grafo Riemanniano*, o grafo resultante após todas as ligações serem adicionadas.

O último grafo a ser gerado também é uma arvore geradora mínima (porém não euclideana), e tem por objetivo gerar o caminho de menor custo a partir do grafo riemanniano. Os custos das arestas (i,j) existentes nesse grafo é definido por 1 - $\|\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j\|$, sendo $i \in j$ os pontos centróides participantes da ligação (i,j). Isto quer dizer que a direção dos planos tangentes será propagada através dos pontos de menor variação entre normais, ou seja, pontos de baixa curvatura entre eles.

A ultima etapa para a orientação de normais é caminhar pela arvore geradora mínima orientando os planos tangentes por pares, ou seja, invertendo a normal \hat{n}_j caso o resultado de $\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j$ seja negativo para todos as ligações (i,j) do grafo. Isso é feito forçando a normal do ponto centróide de maior coordenada z a apontar para o eixo z. Assim garantimos que pelo, menos uma normal está direcionada para fora da superfície, restando apenas *propagar* essa informação a todos os planos tangentes. Isso é feito percorrendo a árvore geradora mínima por meio de uma busca em profundidade.

3.1.1.3 Cálculo da função de distância com sinal

Com a obtenção dos planos tangentes orientados se pode usar a função que caracteriza o método de reconstrução de superfícies a partir de pontos desorganizados. Essa função tem que ser aplicada em todos os pontos do domínio para que, a partir de seu resultado se possa identificar o conjunto zero desse domínio.

Porem, como dito em (Sec. 2.4.3) estamos interessados em um domínio discretizado. Assim, o espaço que envolve o objeto é dividido por uma grade regular 3D, sendo que a função de distância com sinal define um *campo escalar* dentro do conjunto formado por todas os vértices da grade.

A função de distância de um ponto qualquer à superfície é aproximada, então, como sendo a distância de um ponto qualquer pertencente à grade regular ao centróide mais próximo dele. Uma vez que a superfície ainda é desconhecida, utiliza-se o plano tangente mais próximo como aproximação linear local da mesma.

Assim, pelos mesmos princípios mencionados em (Sec. 2.4.1), definimos a função de distância com sinal para todo ponto p como sendo:

$$f(p) = dist_i(p) = (p - o_i).\widehat{n}_i.$$
(3.2)

3.1.2 Etapa 2: Extração de contorno

Com as funções implícitas definidas em cada ponto da grade regular, o que se tem a fazer agora é a extração do conjunto zero da função e a geração de uma malha triangular a partir dela.

Para isso, utiliza-se o algoritmo de *marching cubes*. Esse algoritmo usa a técnica de divisão e conquista para localizar a superfície em um cubo lógico criado a partir de 8 vértices. O objetivo aqui é encontrar os os pontos cujos valores das funções de distância com sinal sejam iguais a zero. Para encontrar esses valores específicos, uma interpolação linear é feita dentro do cubo, e o número de interpolações define o número de triângulos gerados por cubo.

Assim, o algoritmo utiliza o campo escalar gerado pela função de distância com sinal e através dessas interpolações gera a superfície simplicial esperada.

3.2 Reconstrução a partir de Bases de Funções Radiais (CARR R. K. BEATSON, 2001)

Esse método foi apresentado em 2001 e utiliza bases de funções radiais poli-harmônicas para reconstruir superfícies a partir de nuvens de pontos e para reparar malhas incompletas.

A idéia básica é modelar a superfície implícita através da função f(x,y,z) que é igual a zero em todos os pontos da superfície.

Esse método pode ser dividido em três etapas :

- 1. Construção da função de distância com sinal
- 2. Associação dos valores de f com uma RBF
- 3. Visualização da isosuperfície definida pela RBF

3.2.1 Etapa 1: Construção da função de distância com sinal

Esta etapa tem o mesmo objetivo da etapa de cálculo da função de distância com sinal pertencente ao método de reconstrução à partir de pontos desorganizados, ou seja, encontrar uma função f que define implicitamente a superfície e que satisfaça a equação $f(x_i, y_i, z_i) = 0.$

Uma característica dessa etapa, é que nela adiciona-se a cada ponto amostrados dois pontos externos à superfície (IP_i e OP_i), um de cada lado da mesma. Isso é feito no intuito de se evitar uma solução trivial onde f seja igual a zero em todos os pontos. A posição desses pontos é definida pela multiplicação do escalar ϵ com as normais no ponto p_i , adicionadas à posição do mesmo. Assim os pontos externos associados ao ponto p_i podem ser definido como:

- $IP_i = p_i + \epsilon \hat{n}_i$
- $OP_i = p_i \epsilon \widehat{n}_i$

Duas tarefas básicas são necessárias nessa etapa: estimar os vetores normais e determinar a apropriada projeção da distância. Essas tarefas podem ser feitas da mesma forma que foram feitas em (HOPPE, 1992) e pode-se utilizar as informações obtidas através dos dispositivos de aquisição de dados para auxílio. O grande diferencial dessa etapa para a do método citado acima é a não necessidade da estimação das normais em todos os pontos para o sucesso da reconstrução. Por isso, quando a normal obtida em um ponto é ambígua ou imprecisa, não é necessária a adição dos pontos externos a superfície associados a esse ponto. Um outro fator a ser levado em consideração é o tamanho do escalar ϵ , uma vez que se a distância de um ponto externo a seu ponto associado for muito grande pode interceptar a superfície em outro ponto, gerando irregularidades na reconstrução.

3.2.2 Etapa 2: Associação dos valores de f com uma RBF

Com a função de distância com sinal calculada, tem-se agora um problema de interpolação, isto é, deseja-se interpolar todos os pontos a partir dos valores f(x,y,z).

Para isso é necessária uma base interpolante, que é escolhida dentro de um espaço de distribuição em \mathbb{R}^3 . Dentro deste espaço de distribuição tem que ser escolhida uma semi-norma, que é uma equação que mede a suavidade das funções interpolantes, sendo que as menores semi-normas são associadas às funções mais suaves. O estudo (CARR R. K. BEATSON, 2001) mostra que as funções com menores semi-normas são as RBFs, ou seja, são as funções mais suaves no suporte \mathbb{R}^3 . As RBFs assumem a forma:

$$s(x) = p(x) + \sum_{n=1}^{i=1} \lambda_i \varphi(x - x_i), \qquad (3.3)$$

onde p(x) é um polinômio de baixo grau (m) que tem $\{c_1...c_m\}$ como coeficientes desse polinômio, $\varphi(x - x_i)$ é o valor da função da distância euclideana entre dois pontos, λ_i são os coeficientes dessa função e n é o número de pontos amostrados. Com isso, calcula-se os coeficientes, através de um sistema linear simples cujo objetivo é encontrar λ_i e os coeficientes do polinômio p(x). Os pontos x_i são referenciados como sendo os *centros* da RBF.

Assim, usa-se RBFs para interpolar os pontos, podendo com a identificação dos coeficientes estimar a função de distância com sinal em qualquer ponto do domínio.

3.2.3 Etapa 3: Visualização da isosuperfície definida pela RBF

A superfície do objeto é definida como o conjunto de pontos onde a RBF é zero.Essa superfície pode ser visualizada diretamente utilizando um *traçador de raios* implícito.

Uma outra abordagem, sendo essa mais tradicional é a geração de uma superfície simplicial gerada pelo algoritmo *marching cubes* 3.1.2. Porém a tarefa de se gerar uma visualização completa dos dados amostrados numa grade regular 3D (Sec. 2.4.3) precisa ser otimizada, uma vez que o custo associado com a estimação da RBF já é alto.

3.3 Reconstrução a partir de problemas de Poisson (KAZHDAN MATTHEW BOLITHO, 2006)

Esse método apresenta uma nova abordagem para reconstrução de superfícies através de nuvem de pontos. Essa abordagem gira em torno da criação e da resolução de uma equação de Poisson no processo de reconstrução. Assim como os outros métodos mencionados neste trabalho, este método também utiliza a abordagem de reconstrução que obtém a superfície através de uma função implícita.

Os conjunto de amostras contém além da localização dos pontos da nuvem, o valor do vetor normal direcionado para dentro do modelo nos pontos que definem a superfície.

A idéia principal do método é a existência de uma relação integral entre os pontos orientados amostrados e a função indicadora do modelo.

Para se extrair a isosuperfície a partir do conjunto de pontos amostrados, é calculada uma *função indicadora* 3D, definida como 1 nos pontos dentro do objeto e 0 nos pontos de fora.

Como a função indicadora tem valor constante em quase todos os lugares (exceto no bordo) o gradiente da função indicadora é um campo vetorial que é quase todo nulo, exceto nos pontos de superfície. Nesses pontos o valor do gradiente dessa função é igual ao vetor normal direcionado para dentro do modelo nesses pontos. Com isso, os pontos amostrados podem ser vistos como amostras do gradiente da função indicadora que define o modelo.

Assim o problema de se calcular a função indicadora se reduz a inverter o operador gradiente, achando uma função escalar que melhor aproxima o campo vetorial \hat{V} definido pelas amostras. Aplicando o operador divergente, esse problema se transforma em um problema padrão de Poisson: computar a função escalar χ cujo Laplaciano (divergente do gradiente) é igual a divergente do campo vetorial \vec{V} , ou seja:

$$\Delta \chi \equiv \nabla . \nabla \chi = \nabla . \vec{V} \tag{3.4}$$



Figura 11: ilustração intuitiva do método (KAZHDAN MATTHEW BOLITHO, 2006)

Encontrar o resultado da equação de poisson formada nem sempre é possível, uma vez que o campo vetorial \vec{V} nem sempre é integrárvel. Por isso, para se achar a solução aproximada, deve-se aplicar o operador divergente para formar a equação de Poisson (3.4).

Uma particularidade desse método é a utilização de filtros suavizantes no gradiente da função indicadora, como forma de amenizar descontinuidades no mesmo. Dessa forma, o gradiente da função indicadora suavizada é igual ao campo vetorial filtrado definido pelos pontos da superfície.

4 Aplicações e Resultados

Este capítulo será utilizado para a demonstração e análise da implementação de um modelo reconstrutor de superfícies, além da realização de um breve comparativo entre os métodos de reconstrução.

4.1 Implementação de um modelo reconstrutor

Com o intuito de melhor compreender o contexto estudado, fez-se neste trabalho a implementação de um dos métodos de reconstrução de superfícies aqui mencionados. O método escolhido para ser usada na prática foi o proposta por (HOPPE, 1992) como método de reconstrução de superfícies a partir de pontos desorganizados (Sec. 3.1). Isso por se tratar de um método fundamental na sub-área de reconstrução de superfícies e por apresentar uma série de conceitos utilizados em muitos métodos de reconstrução atuais.

Aqui serão demonstrados os resultados alcançados em todas as etapas do método mencionado acima.

4.1.1 Etapa 1: Cálculo da distância geométrica com sinal (Sec. 3.1.1)

O primeiro passo para o início do processo de reconstrução é a obtenção de dados. Como dito em (Sec. 3), essa abordagem utiliza como dados amostrados uma nuvem de pontos dispostas de forma desorganizada, ou seja, sem relações de localização espacial entre eles.

4.1.1.1 Estimação dos planos tangentes (Sec. 3.1.1.1)

Como foi mencionado nesta etapa, os vetores normais estimados inicialmente podem ser qualquer um dos vetores normais (interno ou externo) no ponto. Como se está trabalhando com um campo vetorial orientável, uma orientação consistente desses vetores se faz necessária.



Figura 12: Nuvem de pontos (4800 pontos)



Figura 13: cada ponto ligado com seus k-vizinhos, neste k é igual a oito



Figura 14: resultado da primeira etapa do processo de estimação de normais

4.1.1.2 Orientação dos planos tangentes (Sec. 3.1.1.2)

Neste espaço serão demonstrados todos os grafos gerados no processo de orientação de normais já citados (Sec. 3.1.1.2).



Figura 15: arvore geradora mínima euclideana



Figura 16: grafo riemanniano



Figura 17: arvore geradora mínima não euclideana



Figura 18: vetores normais orientados

4.1.1.3 Cálculo da função de distância com sinal (Sec. 3.1.1.3)

Neste espaço será exibido um exemplo de como definir um conjunto de pontos pertencentes ao objeto como os valores do campo escalar definido pela função f (Sec. 3.1.1.3).



Figura 19: pontos pertencentes à grade regular 3d cujos valores de f são maiores que 0 (pontos interiores)

4.1.2 Etapa 2: Extração de contorno (Sec. 3.1.2)

Aqui serão exibidos os resultados práticos da utilização do modelo reconstrutor utilizando o método proposto (Sec. 3.1). Um detalhe importante nesta etapa é que o número de voxels na grade regular determina as características da superfície simplicial gerada. Assim, quanto maior o intervalo entre os pontos da grade regular, menor o número de triângulos gerados. Utilizando a mesma idéia, intervalo muito pequeno entre os pontos da grade regular favorece os aparecimento de *hiperplanos*.



Figura 20: exemplo de uma superfície extraída com auxílio de uma grade regular gerada com um número pequeno de subdivisões (10)



Figura 21: exemplo de uma superfície extraída com auxílio de uma grade regular gerada com um número razoável de subdivisões (40)



Figura 22: exemplo de uma superfície extraída com auxílio de uma grade regular gerada com um número grande de subdivisões (100)



Figura 23: malha triangular da superfície acima



Figura 24: superfície extraída com auxílio de uma grade regular gerada com um número médio de subdivisões $\left(40\right)$



Figura 25: neste caso, o número de subdivisões é muito grande (250). Pode-se ver claramente o aparecimento de hiperPlanos

4.2 Breve comparativo entre métodos

Cada método de reconstrução de superfícies tem uma maneira característica de manipular os dados amostrados até que uma superfície possa ser extraída. Não só a forma de manipulação de dados difere, mas também uma série de fatores como tempo total do processo, memória necessária para reconstrução, número de triângulos gerados, disposição dos triângulos gerados, etc.

Abaixo segue um pequeno informativo encontrado em (KAZHDAN MATTHEW BO-LITHO, 2006) relacionado alguns fatores citados acima com alguns métodos de reconstrução de superfícies mais populares.

e e in para 3000								
Método	Triangulos	Time (s)	Memória (MB					
Power Crust	554,332	380	2653					
Robust Cocone	272,662	892	544					
FastRBF	1,798,154	4919	796					
MPU	925,240	28	260					
Hoppe et al 1992	950,562	70	330					
VRIP	1,038,055	86	186					
Kazhdan 2005	910,320	125	1684					
POISSON	911,390	263	310					

Figura 26: quadro comparativo (KAZHDAN MATTHEW BOLITHO, 2006)

5 Conclusão

Através desse trabalho, pode-se perceber que a sub-área de reconstrução de superfície, apesar de nova, é uma sub-área bastante vasta e em crescimento. Apesar dos três métodos aqui estudados poderem apresentar a mesma classificação, eles utilizam abordagens bastante diferentes entre sí.

Assim como as abordagens entre os métodos de reconstrução de superfícies são diferentes, seus resultados também não são os mesmo, e dependem muito dos tipos de dados amostrados e da eficiência das técnicas utilizadas.

O método escolhido para reconstrução vai variar muito de acordo com os tipos de dados que foram amostrados e com o tipo de resultado esperado. Assim, muitas vezes técnicas que reconstroem com um nível alto de detalhamento podem não ser utilizadas pelo alto custo computacional que as envolve.

Por fim, fica a noção de que reconstruir superfícies é algo possível e viável, mesmo com a possível existência das dificuldades mencionadas neste trabalho.

Referências

ATENCIO, Y. T. P. Esquema de Detecção e Resposta a Colisões Para Animação Física Simplificada. 71 p. Dissertação (Mestrado) — COPPE-UFRJ, 2005.

CARR R. K. BEATSON, J. B. C. T. J. M. W. R. F. B. C. M. T. R. E. J. C. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions. University of Canterbury, p. 10, 2001.

CAVALCANTI, P. R. Introdução à Computação Gráfica. [S.l.]: UFRJ, 2000. 178 p.

HOPPE, H. Surface reconstruction from unorganized points. University of Washington, p. 8, 1992.

KAZHDAN MATTHEW BOLITHO, H. H. M. Poisson surface reconstruction. Johns Hopkins University, p. 10, 2006.

MULLER, H. Surface reconstruction - an introduction. University of Dortmund, p. 4, 1992.

O'NEILL., B. Elementary differential geometry. Academic Press, 1966.

OUYANG, H.-Y. F. D. On the normal vector estimation for point cloud data from smooth surfaces. University of Western Ontario, p. 9, 2004.

SCHENCK, H. Computational Algebraic Geometry. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 207 p.

SEIXAS, M. G. Roberto de B. *Introdução à Visualização Volumétrica*. [S.l.]: Pontifícia Universidade Católica, 1999. 107 p.

VELHO, J. G. L. Sistemas Gráficos 3D. [S.l.]: IMPA, 2001. 330 p.

ZOMORODIAN, A. J. *Topology for Computing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. 259 p.